Programa Pares Ordenados

Trabajo Final

Introducción a la Teoría Geométrica de Grupos:
Cuando el Álgebra, el Análisis y la Topología se unen

Presentan:

Néstor Fabián Bravo Hernández

Licenciatura en matemáticas

Universidad de Guanajuato

nestor.bravo@cimat.mx

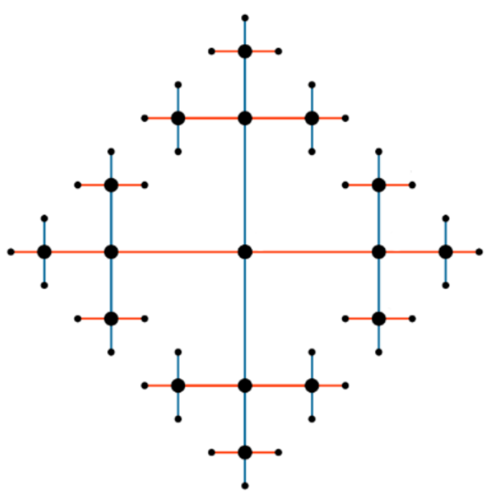
Mentor:

Audrey Goodnight

Universidad de Nebraska–Lincoln

agoodnight2@huskers.unl.edu

15 de diciembre de 2023



Introducción

Los grupos representan una noción abstracta en el campo del álgebra que formaliza el estudio de simetrías en diversos objetos matemáticos. La teoría geométrica de grupos se adentra en la interacción entre las propiedades algebraicas y geométricas de los grupos. Se plantean preguntas fundamentales, como si los grupos pueden ser considerados como objetos con cualidades geométricas y cómo estas propiedades geométricas se vinculan con las características algebraicas de los grupos. Además, se indaga sobre cómo opera la teoría geométrica de grupos. Tradicionalmente, se relacionan invariantes con valores en grupo a objetos geométricos, como el grupo de isometrías o el grupo fundamental, y una idea central de la teoría geométrica de grupos es que este proceso puede ser recíproco hasta cierto punto.

Un ejemplo esencial de objetos geométricos asociados a un grupo son los grafos de Cayley, junto con las métricas de palabras correspondientes, elegidos en función de un conjunto generador específico. Por ejemplo, en una perspectiva de geometría a gran escala, los grafos de Cayley de $\mathbb{Z}$ se asemejan a la geometría de la línea real, los de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se asemejan a la geometría del plano euclidiano, y los del grupo libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ con dos generadores poseen características esenciales de la geometría del plano hiperbólico.

La teoría geométrica de grupos es intrigante, ya que fusiona aspectos de diversas áreas matemáticas de manera ingeniosa. Además, esta teoría encuentra numerosas aplicaciones en campos clásicos como la teoría de grupos, la geometría Riemanniana, la topología y la teoría de números. Por ejemplo, los grupos libres, que en principio son conceptos puramente algebraicos, pueden caracterizarse desde una perspectiva geométrica mediante sus acciones en árboles. Esto conduce a una demostración elegante de un hecho puramente algebraico: que los subgrupos de grupos libres son, a su vez, libres.

En el presente trabajo, exploraremos los conceptos fundamentales que forman la base de la teoría geométrica de grupos. Comenzaremos con una introducción a la teoría elemental de grupos, seguida de una presentación de los grafos de Cayley. Luego, profundizaremos en el tema de las Cuasi-Isometrías y, por último, ofreceremos una visión general de los problemas contemporáneos en este ámbito.

Índice

1. Un poco de Teoría de Grupos **3**
1.1. Conjuntos Generadores de grupos . . . 3
1.2. Grupos Libres . . . 3
1.3. Generadores y Relaciones . . . 6

2. Gráficas de Cayley **8**
2.1. Notación de Gráficas . . . 8
2.2. Gráficas de Cayley . . . 10

3. Cuasi-Isometrías **13**
3.1. Definiciones y Propiedades Elementales . . . 13
3.2. Cuasi-Isometrías sobre Grupos . . . 17
3.3. Espacios Cuasi-Geodésicos . . . 20
3.4. Geodesificación vía Realización geométrica de Gráficas . . . 21
3.5. El Lema de Svarc–Milnor . . . 24
3.6. Invariantes cuasi-isométricos y rigidez . . . 28

4. Temas centrales de la Teoría Geométrica de Grupos. **31**
4.1. Tipos de Crecimiento en grupos . . . 31
4.2. Extremos y Fronteras . . . 35
4.3. Grupos Hiperbólicos . . . 37

5. Anexos. **40**

1. Un poco de Teoría de Grupos

Dado que los personajes principales en la teoría de grupos geométricos son los grupos, comenzamos revisando algunos conceptos y ejemplos de teoría de grupos. En particular, presentaremos principios de construcción básicos que nos permiten generar ejemplos interesantes de grupos.

1.1. Conjuntos Generadores de grupos

¿Cómo podemos especificar un grupo? Una forma es construir un grupo como el grupo de automorfismos de algún objeto o como un subgrupo o cociente del mismo. Sin embargo, si estamos interesados en encontrar grupos con ciertas características algebraicas, a veces puede ser difícil encontrar un objeto geométrico correspondiente.
En esta sección, veremos que existe otra forma abstracta de construir grupos, a través de generadores y relaciones. Demostraremos que para cada lista de elementos (los *generadores*) y ecuaciones teóricas de grupo (las *relaciones*) que relacionan estos elementos, siempre existe un grupo en el que estas relaciones se cumplen de la manera más no trivial posible.

Definición 1.1 (Conjuntos Generadores de Grupos)**.** Sea G un grupo y $S \subset G$ un subconjunto. El subgrupo generado por S en G es el subgrupo más pequeño (con respecto a la inclusión) de G que contiene a S; el subgrupo generado por S en G se denota como $\langle S \rangle_G$.
El conjunto S genera G si $\langle S \rangle_G = G$. Un grupo es finitamente generado si contiene un subconjunto finito que genera el grupo en cuestión.

Resulta útil conocer el siguiente resultado que es conocido de la teoría elemental de grupos.

Proposición 1.1. *Sea G un grupo y $S \subset G$. Entonces, el subgrupo generado por S en G siempre existe y puede describirse de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_G &= \{H \mid H \subset G \text{ es un subgrupo con } S \subset H\} \\ &= \{s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_1, \ldots, s_n \in S, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1 (Conjuntos generadores)**.** Veamos los siguientes ejemplos básicos

1. Si G es un grupo, entonces G es un conjunto generador de G.
2. El grupo trivial es generado por el conjunto vacío.
3. El conjunto $\{1\}$ genera el grupo aditivo $\mathbb{Z}$; además, por ejemplo, $\{2, 3\}$ también es un conjunto generador de $\mathbb{Z}$. Sin embargo, $\{2\}$ y $\{3\}$ no son conjuntos generadores de $\mathbb{Z}$.
4. Sea X un conjunto. Entonces, el grupo simétrico S_X es finitamente generado si y solo si X es finito

1.2. Grupos Libres

En la teoría de grupos, podemos formular lo que significa ser un conjunto generador libre, sin embargo, como veremos, la mayoría de los grupos no admiten conjuntos generadores libres.

Definición 1.2 (Grupo Libre)**.** Sea S un conjunto. Un grupo F que contiene S se genera libremente por S si F tiene la siguiente propiedad universal: Para cada grupo G y cada mapa $\varphi : S \to G$, existe un único homomorfismo de grupos $\overline{\varphi} : F \to G$ que extiende a φ:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] & G \\ F \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión de S en F. Un grupo es libre si contiene un conjunto generador libre.

Ejemplo 1.2 (Grupos libres)**.** Los siguiente ejemplos ilustran el concepto de grupo libre:

- El grupo aditivo $\mathbb{Z}$ es libremente generado por $\{1\}$. El grupo aditivo $\mathbb{Z}$ no es libremente generado por $\{2, 3\}$ o $\{2\}$ o $\{3\}$; en particular, no todo conjunto generador de un grupo contiene un conjunto generador libre.
- El grupo trivial es libremente generado por el conjunto vacío.
- No todos los grupos son libres; por ejemplo, los grupos aditivos $\mathbb{Z}/2$ y $\mathbb{Z}_2$ no son libres.

El término *propiedad universal* nos obliga a demostrar que los objetos que tienen esta propiedad universal son únicos en un sentido apropiado; además, para cada conjunto, en efecto, existe un grupo generado libremente por el conjunto dado. Usando la propiedad universal (y un montón de cálculos) se pueden demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.2. *Sea S un conjunto. Entonces, hasta isomorfismo canónico, existe un único grupo generado libremente por S.*

Observación 1.1. La idea es construir un grupo que consiste en *palabras* formadas por elementos de S y sus *inversos*, utilizando solo las reglas de cancelación obvias para elementos de S y sus *inversos*. Más precisamente, consideramos el alfabeto

$$A := S \cup \widehat{S}$$

donde $\widehat{S} := \{\widehat{s} \mid s \in S\}$ es una copia disjunta de S; es decir, $\widehat{\cdot} : S \to \widehat{S}$ es una biyección y $S \cap \widehat{S} = \emptyset$. Para cada elemento s en S, el elemento $\widehat{s}$ jugará el papel del inverso de s en el grupo.

1. Como primer paso, definimos A^* como el conjunto de todas las secuencias (o *palabras*) finitas sobre el alfabeto A; esto incluye en particular la palabra vacía ε. En A^* definimos una composición $A^* \times A^* \to A^*$ mediante la concatenación de palabras. Esta composición es asociativa y ε (la palabra vacía) es el elemento neutro.
2. Como segundo paso, definimos $F(S)$ como $A^*/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por

$$\forall x, y \in A^*, \quad \forall s \in S, \quad xs\widehat{s}yb \sim xy,$$
$$\forall x, y \in A^*, \quad \forall s \in S, \quad x\widehat{s}syb \sim xy.$$

Denotamos las clases de equivalencia con respecto a la relación de equivalencia $\sim$ como $[\cdot]$. Se puede comprobar (haciendo los cálculos necesarios) que la concatenación induce una composición bien definida $\cdot : F(S) \times F(S) \to F(S)$ mediante $[x] \cdot [y] = [xy]$ para todos $x, y \in A^*$.

Observación 1.2. Para cualquier grupo G con elemento identidad e y cualquier mapa $\phi : S \to G$, existe un homomorfismo único de grupos $\overline{\phi} : F(S) \to G$ tal que $\overline{\phi} \circ i = \phi$. Dado ϕ, construimos un mapa

$$\phi^* : A^* \to G$$

inductivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\mapsto e, \\ sx &\mapsto \phi(s) \cdot \phi^*(x), \\ \widehat{s}x &\mapsto \phi(s)^{-1} \cdot \phi^*(x) \end{aligned}$$

para todo $s \in S$ y todo $x \in A^*$. Esta definición de ϕ_* es compatible con la relación de equivalencia $\sim$ en A^* porque es compatible con el conjunto generador dado de $\sim$ y que $\phi_*(xy) = \phi_*(x) \cdot \phi_*(y)$ para todo $x, y \in A^*$; Por lo tanto, ϕ_* induce un mapa bien definido

$$\overline{\phi} : F(S) \to G, \quad [x] \mapsto [\phi_*(x)],$$

que es un homomorfismo de grupos.

El siguiente resultado se presenta sin demostración.

Proposición 1.3. *La siguiente proposición nos permite definir el rango:*

1. *Si F es un grupo libre y S es un conjunto generador libre de F, y S_0 es un conjunto generador de F, entonces $|S_0| \geq |S|$.*

2. *En particular, todos los conjuntos generadores libres de F tienen la misma cardinalidad, llamada el rango de F.*

Definición 1.3 (Grupo libre F_n)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son n elementos distintos. Entonces, escribimos F_n para *el* grupo generado libremente por S, y llamamos a F_n el grupo libre de rango n.

Corolario 1.1. *Un grupo es finitamente generado si y solo si es el cociente de un grupo libre finitamente generado, es decir, un grupo G es finitamente generado si y solo si existe un grupo libre finitamente generado F y un homomorfismo de grupos sobreyectivo $F \to G$.*

Demostración. Los cocientes de grupos finitamente generados también son finitamente generados (por ejemplo, la imagen de un conjunto generador finito es un conjunto generador finito del cociente).
Recíprocamente, consideremos un grupo finitamente generado G, generado por el conjunto finito $S \subset G$. Además, sea F el grupo libre generado por S; el grupo F también es finitamente generado. Utilizando la propiedad universal de F, encontramos un homomorfismo de grupos $\pi : F \to G$ que es la identidad en S. Dado que S genera G y porque S se encuentra en la imagen de π, se sigue que $\operatorname{im} \pi = G$. ■
Mientras que los subespacios de espacios vectoriales no pueden tener una dimensión mayor que el espacio ambiente, los grupos libres de rango 2 contienen subgrupos que son isomorfos a grupos libres de rango superior, incluso subgrupos libres de rango (potencialmente) infinito

1.3. Generadores y Relaciones

Los grupos libres nos permiten generar grupos genéricos sobre un conjunto dado; para obligar a los generadores a satisfacer una lista dada de ecuaciones de teoría de grupos, dividimos por un subgrupo normal adecuado.

Definición 1.4 (Subgrupo normal de G generado por S)**.** Sea G un grupo y $S \subset G$ un subconjunto. El subgrupo normal de G generado por S es el subgrupo normal más pequeño (con respecto a la inclusión) de G que contiene a S; se denota como $\langle S \rangle_G^{\triangleleft}$.

Proposición 1.4. *Sea G un grupo y $S \subset G$. Entonces, el subgrupo normal generado por S en G siempre existe y puede describirse de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\langle S \rangle_G^{\triangleleft} &= \{H \mid H \subset G \text{ es un subgrupo normal con } S \subset H\} \\ &= \left\{g_1 \cdot s_1^{\varepsilon_1} \cdot g_1^{-1} \cdot \ldots \cdot g_n \cdot s_n^{\varepsilon_n} \cdot g_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}, s_1, \ldots, s_n \in S, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, g_1, \ldots, g_n \in G\right\}.\end{aligned}$$

A continuación, presentamos el concepto de grupo generado con relaciones, el cual es un concepto clave para definir grupos más exóticos.

Definición 1.5 (Generadores y Relaciones)**.** Sea S un conjunto, $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$ un subconjunto de palabras y $F(S)$ el grupo libre generado por S. Luego, el grupo

$$\langle S \mid R \rangle := F(S)/\langle R \rangle_{F(S)}^{\triangleleft}$$

se dice que está generado por S con las relaciones R.
Si G es un grupo con $G \cong \langle S \mid R \rangle$, entonces el par (S, R) es una presentación de G; por abuso de notación, también usamos el símbolo $\langle S \mid R \rangle$ para denotar esta presentación.

Observación 1.3. Las relaciones de la forma $w \cdot w_0^{-1}$ también se pueden denotar como $w = w_0$, ya que en el grupo generado, las palabras w y w_0 representan el mismo elemento del grupo.

La siguiente proposición es una forma formal de decir que $\langle S|R \rangle$ es un grupo en el que las relaciones R se mantienen de la manera más significativa posible:

Teorema 1.1 (Propiedad universal de generadores y relaciones)**.** *Sea S un conjunto y $R \subset (S \cup S^{-1})^*$. El grupo $\langle S \mid R \rangle$ generado por S con las relaciones R, junto con el mapa canónico $\pi : S \to F(S)/\langle R \rangle_{F(s)}^{\triangleleft}$ en $F(S) = \langle S \rangle$, tiene la siguiente propiedad universal: Para cada grupo G y cada mapa $\phi : S \to G$ con la propiedad de que*

$$\phi^*(r) = e$$

en G para todas las palabras $r \in R$, existe exactamente un homomorfismo de grupos $\phi : \langle S \mid R \rangle \to G$ tal que $\phi \circ \pi = \phi$, donde $\phi^* : (S \cup S^{-1})^* \to G$ es la extensión canónica de ϕ a palabras sobre $S \cup S^{-1}$. Además, $\langle S \mid R \rangle$ (junto con π) queda determinado de manera única (hasta isomorfismo canónico) por esta propiedad universal.

La demostración del teorema es una combinación de las propiedades universales de los grupos libres y la propiedad universal de los subgrupos cocientes.

Ejemplo 1.3. Considere los ejemplos elementales:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\langle x \mid x^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Esto se puede demostrar a través de la propiedad universal o mediante la construcción explícita de $\langle x \mid x^n \rangle$.

2. Tenemos $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, como se deriva de la propiedad universal.

Ejemplo 1.4 (Grupo de Thomson)**.** El grupo de Thompson F se define como:

$$F = \langle x_0, x_1, \dots \mid x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1} \text{ para } k, n \in \mathbb{N}, k < n \rangle.$$

De hecho, F admite una presentación con finitos generadores y relaciones:

$$F \cong \langle a, b \mid [ab^{-1}, a^{-1}ba], [ab^{-1}, a^{-2}ba^2] \rangle.$$

donde, la notación $[a, b]$ para dos elementos a, b pertenecientes a un grupo arbitrario G representa

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

A dicho elemento le llamamos el conmutador de a, b.

Ejemplo 1.5 (Grupo de Baumslag-Solitar)**.** Para $m, n \in \mathbb{N}, n > 0$, el grupo de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ se define mediante la presentación:

$$BS(m, n) = \langle a, b \mid ba^m b^{-1} = a^n \rangle.$$

Por ejemplo, $BS(1, 1) \cong \mathbb{Z}_2$. La familia de grupos de Baumslag-Solitar contiene muchos ejemplos intrigantes de grupos. Por ejemplo, el grupo $BS(2, 3)$ es un grupo con solo dos generadores y una única relación que no es Hopfiano, es decir, existe un homomorfismo de grupos sobreyectivo $BS(2, 3) \to BS(2, 3)$ que no es un isomorfismo.

Observación 1.4. El problema de determinar si un grupo dado por generadores (finitamente muchos) y relaciones (finitamente muchos) es el grupo trivial o no, es indecidible en el sentido de la teoría de la computación. Esto significa que no existe un procedimiento algorítmico que, dado generadores y relaciones, pueda decidir si el grupo correspondiente es trivial o no.
Más generalmente, el problema de la palabra, es decir, el problema de decidir, dados generadores y relaciones, si una palabra dada en estos generadores representa o no el elemento trivial en el grupo correspondiente, es indecidible. En contraste, clases geométricas de grupos, el problema de la palabra es soluble ver [Löh. 2018. Cap. 7].

2. Gráficas de Cayley

Una pregunta fundamental de la teoría de grupos geométricos es cómo se pueden ver los grupos como objetos geométricos; una forma de ver un grupo (finitamente generado) como un objeto geométrico es a través de las gráficas de Cayley.
En el primer paso, se asocia una estructura combinatoria a un grupo y a un conjunto generador dado: la gráfica de Cayley correspondiente. Este paso ya tiene un sabor geométrico rudimentario y se discute en este capítulo. En el segundo paso, se agrega una estructura métrica a las gráficas de Cayley a través de métricas de palabras.

2.1. Notación de Gráficas

Comencemos revisando algunos conceptos básicos de teoría de graficas; se puede encontrar más información en la literatura. En lo que sigue, siempre consideraremos graficas no dirigidos, simples y sin bucles:

Definición 2.1 (Gráfica)**.** Una gráfica es un par $X = (V, E)$ de conjuntos disjuntos donde E es un conjunto de subconjuntos de V que contienen exactamente dos elementos, es decir,

$$E \subseteq V^{[2]} := \{U : U \subseteq V, |U| = 2\};$$

los elementos de V son los vértices y los elementos de E son las aristas de X.

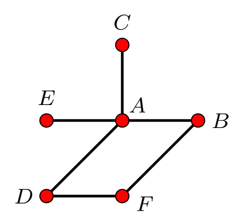


Figura 2.1: Ejemplo de una gráfica.

En otras palabras, las gráficas son una perspectiva diferente de las relaciones (simétricas), y normalmente se utilizan para modelar relaciones.

Definición 2.2 (Adyacente, grado, completitud)**.** Sea (V, E) una gráfica.

1. Decimos que dos vértices $v, v_0 \in V$ son vecinos o adyacentes si están unidos por una arista, es decir, si $\{v, v_0\} \in E$.

2. El número de vecinos de un vértice es el grado de este vértice.

3. La gráfica X es una gráfica completa si todos los vértices son vecinos entre sí.

Definición 2.3 (Isomorfismo de gráficas)**.** Sean $X = (V, E)$ y $X' = (V', E')$ dos gráficas. Las gráficas X y X' son isomorfos si existe un isomorfismo de gráficas entre X y X', es decir, una biyección $f : V \to V'$ tal que para todo $v, w \in V$ tenemos que $\{v, w\} \in E$ si y solo si $\{f(v), f(w)\} \in E'$. Por lo tanto, las gráficas isomorfas solo difieren en las etiquetas de sus vértices.

Observación 2.1. *Para lectores familiarizados con teoría de categorías*: esta noción de isomorfismo de gráficas también se puede obtener como los isomorfismos de una categoría de gráficas con morfismos adecuados. Sin embargo, existen varias opciones naturales para dicha categoría; por lo tanto, preferimos la formulación concreta anterior.

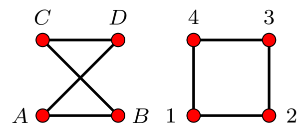


Figura 2.2: Ejemplo de Gráficas Isomorfas ($A \mapsto 1$, $B \mapsto 2$, $C \mapsto 3$, $D \mapsto 4$)

Definición 2.4 (Caminos, ciclos)**.** Sea $X = (V, E)$ una gráfica.

1. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un camino en X de longitud n es una secuencia $v_0, \dots, v_n$ de vértices distintos $v_0, \dots, v_n \in V$ con la propiedad de que $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$ se cumple para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$; si $n < \infty$, entonces decimos que este camino conecta los vértices v_0 y v_n.

2. La gráfica X se llama conexo si cada par de sus vértices puede ser conectado por un camino en X.

3. Para $n \in \mathbb{N}_{>2}$, un ciclo en X de longitud n es un camino $v_0, \dots, v_{n-1}$ en X con $\{v_{n-1}, v_n\} \in E$.

Definición 2.5 (Árbol)**.** Un árbol es una gráfica conexa que no contiene ningún ciclo. una gráfica que no contiene ningún ciclo es un bosque; por lo tanto, un árbol es lo mismo que un bosque conexo.

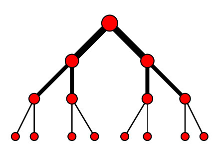


Figura 2.3: Ejemplo de Árbol

Presentamos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 2.1 (Caracterización de árboles)**.** *Una gráfica es un árbol si y solo si para cada par de vértices existe exactamente un camino que conecta estos vértices.*

Definición 2.6 (Árbol generador)**.** Un árbol generador de una gráfica X es una subgráfica de X que es un árbol y contiene todos los vértices de X. Una subgráfica de una gráfica (V, E) es una gráfica (V_0, E_0) con $V_0 \subset V$ y $E_0 \subset E$.

2.2. Gráficas de Cayley

Dado un conjunto generador de un grupo, podemos organizar la estructura combinatoria dada por el conjunto generador como una gráfica:

Definición 2.7 (Gráfica de Cayley)**.** Sea G un grupo y sea $S \subset G$ un conjunto generador de G. Entonces, la gráfica de Cayley de G con respecto al conjunto generador S es la gráfica $\mathrm{Cay}(G, S)$ cuyo

1. conjunto de vértices es G, y cuyo
2. conjunto de aristas es

$$\{g, g \cdot s\} \quad \text{para} \quad g \in G,\, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}$$

Ejemplo 2.1. Considere los siguientes ejemplos:

1. las gráficas de Cayley del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ con respecto a los conjuntos generadores $\{1\}$ y $\{2, 3\}$, respectivamente (figura 2.4). Cuando se observan estos dos gráficas *desde lejos*, parecen tener la misma estructura global, es decir, se asemejan a la recta real; en términos técnicos, estos gráficas son cuasi-isométricos con respecto a las métricas de palabras correspondientes, un concepto que introduciremos y estudiaremos detenidamente en capítulos posteriores.

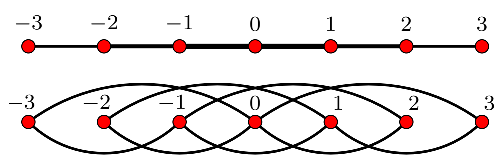


Figura 2.4: Gráfica de Cayley de $\mathbb{Z}$ con generadores $\{1\}$ (arriba) y $\{1, 2\}$ (abajo)

2. La gráfica de Cayley del grupo aditivo $\mathbb{Z}^2$ con respecto al conjunto generador $\{(1, 0), (0, 1)\}$ se asemeja a la retícula de enteros en $\mathbb{R}^2$; cuando se ve desde lejos, esta gráfica de Cayley se asemeja al plano euclidiano.

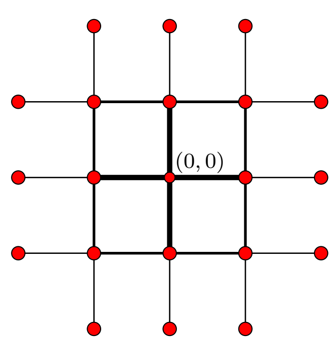


Figura 2.5: Gráfica de Cayley $\mathbb{Z}^2$

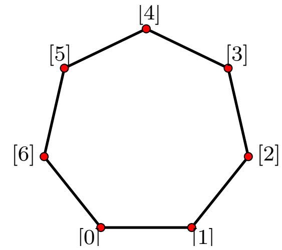


Figura 2.6: Gráfica de Cayley $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

3. La gráfica de Cayley del grupo cíclico $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ con respecto al conjunto generador $\{[1]\}$ se parece a una gráfica de ciclo.

4. Ahora consideramos el grupo simétrico S_3. Sea τ la transposición que intercambia 1 y 2, y sea σ el ciclo $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$. La figura (2.8) presenta la gráfica de Cayley de S_3 con el generador $\{\sigma, \tau\}$

   La gráfica de Cayley $\mathrm{Cay}(S_3, S_3)$ es una gráfica completa de seis vértices; de manera similar, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6, \mathbb{Z}/6)$ es una gráfica completa de seis vértices. En particular, vemos que grupos no isomorfos pueden tener gráficas de Cayley isomorfos con respecto a ciertos conjuntos generadores.

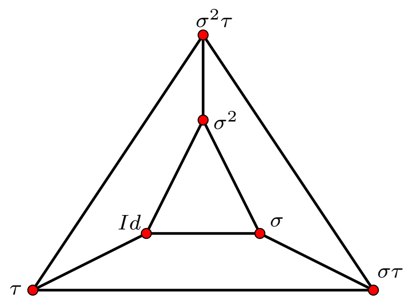


Figura 2.7: Gráfica de Cayley de S_3

5. La gráfica de Cayley de un grupo libre con respecto a un conjunto generador libre es un árbol.

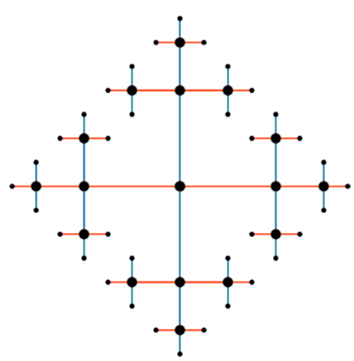


Figura 2.8: Gráfica de Cayley de F_2

Proposición 2.1 (Propiedades elementales de las gráficas de Cayley)**.** *Las siguientes son propiedades inmediatas de la definición*

1. *las gráficas de Cayley son conexos, ya que cada vértice g puede alcanzarse desde el vértice del elemento neutro caminando a lo largo de las aristas correspondientes a una presentación de longitud mínima de g en términos de los generadores dados.*

2. *las gráficas de Cayley son regulares en el sentido de que cada vértice tiene el mismo número $|(S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}|$ de vecinos.*

3. *una gráfica de Cayley es localmente finito si y solo si el conjunto generador es finito; una gráfica se dice localmente finita si cada vértice tiene solo un número finito de vecinos.*

Observación 2.2 (Rigidez del isomorfismo de las gráficas de Cayley)**.** Es natural considerar el problema combinatorio de qué grupos finitamente generados admiten gráficas de Cayley isomorfos, es decir, para qué grupos finitamente generados G y H existen conjuntos generadores finitos $S \subset G$ y $T \subset H$, de modo que las gráficas $\mathrm{Cay}(G, S)$ y $\mathrm{Cay}(H, T)$ sean isomorfos. Ambas preguntas buscan propiedades de rigidez de las gráficas de Cayley, es decir, cuánta de la estructura algebraica es lo suficientemente rígida como para ser visible en la combinatoria de todos las gráficas de Cayley de un grupo dado.
Estas preguntas están bien estudiadas para grupos finitos. Para grupos infinitos, se sabe lo siguiente:

1. las gráficas de Cayley de grupos abelianos finitamente generados son rígidos en el sentido de que los automorfismos son afines en la parte libre y que estos gráficas de Cayley recuerdan la cantidad de rango y el tamaño de la parte de torsión.

2. Además, se sabe que los automorfismos de las gráficas de Cayley de grupos nilpotentes finitamente generados sin torsión son afines y que las gráficas de Cayley de grupos nilpotentes finitamente generados recuerdan el grupo módulo de la torsión.

3. Los grupos libres finitamente generados admiten gráficas de Cayley isomorfos si y solo si tienen el mismo rango. La prueba es probabilística; más precisamente, se basa en la relación entre el grado esperado de bosques generadores aleatorios y el primer número de Betti L^2.

3. Cuasi-Isometrías

La teoría geométrica de grupos busca ver a los grupos como objetos geométricos, incorporando la métrica a través de los grafos de Cayley y la métrica de palabras con respecto a un conjunto generador. Sin embargo, esta métrica depende del conjunto generador elegido. Para superar esta limitación y obtener una noción de geometría en un grupo independiente de los conjuntos generadores, se recurre a la geometría a gran escala y se utiliza el concepto de cuasi-isometría, que desempeña un papel fundamental en la teoría geométrica de grupos.

3.1. Definiciones y Propiedades Elementales

En términos simples, buscamos definir un concepto de similitud a gran escala. Esto significa que queremos considerar espacios métricos como equivalentes si parecen iguales cuando se observan desde una larga distancia. Tomaremos como guía lo siguiente: debemos ver la línea de números reales y el conjunto de números enteros (con la métrica heredada de la línea de números reales) como equivalentes porque parecen similares cuando se observan desde lejos. Recordemos la definición de Espacio Métrico

Definición 3.1 (Espacio Métrico)**.** Un espacio métrico es un par (X, d) que consiste en un conjunto X y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $x, y \in X$, tenemos $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
2. Para todo $x, y \in X$, tenemos $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Para todo $x, y, z \in X$, se cumple la desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La forma más natural de estudiar la similaridad entre espacios métricos es el concepto de cuasi-isometría

Definición 3.2. (Isometría). Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y)

1. Decimos que f es una incrustación isométrica si

$$\forall x, x_0 \in X, \quad d_Y(f(x), f(x_0)) = d_X(x, x_0).$$

2. La función f es una isometría si es una incrustación isométrica y si existe una incrustación isométrica $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ y $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
3. Dos espacios métricos son isométricos si existe una isometría entre ellos.

La idea de isometría resulta ser extremadamente inflexible, quizás incluso demasiado para nuestras necesidades. Lo que buscamos es una noción de *similitud* aplicable a espacios métricos que capture principalmente la estructura a gran escala de dicho espacio, sin prestar demasiada atención a los detalles locales. Es posible relajar la definición de isometría, permitiendo un cierto margen de error multiplicativo constante:

Definición 3.3 (Equivalencia bilipschitz)**.** Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y).

1. Decimos que f es una incrustación bilipschitz si existe una constante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\forall x, x_0 \in X, \quad \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x_0) \leq d_Y(f(x), f(x_0)) \leq c \cdot d_X(x, x_0).$$

2. La función f es una equivalencia bilipschitz si es una incrustación bilipschitz y si existe una incrustación bilipschitz $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ y $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

3. Dos espacios métricos se llaman equivalentes bilipschitz si existe una equivalencia bilipschitz entre ellos.

Observación 3.1. Por definición, toda incrustación isométrica (Incrustación bilipschitz) es inyectiva y es un homeomorfismo con respecto a las topologías inducidas por las métricas. Además, una incrustación isométrica (Equivalencia bilipschitz) es una isometría si y solo si es biyectiva.

Las equivalencias bilipschitz también preservan la información local; por lo tanto, las equivalencias bilipschitz aún retienen demasiado detalle para nuestros propósitos. Como siguiente -y último- paso, permitimos un error aditivo uniforme.

Definición 3.4 (Cuasi-isometría)**.** Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y).

1. La función f es una incrustación cuasi-isométrica si existen constantes $c \in \mathbb{R}_{>0}$ y $b \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que f es una incrustación cuasi-isométrica (c, b), es decir,

$$\forall x, x_0 \in X, \quad \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x_0) - b \leq d_Y(f(x), f(x_0)) \leq c \cdot d_X(x, x_0) + b.$$

2. Una función $f_0 : X \to Y$ tiene distancia finita de f si existe $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$\forall x \in X, \quad d_Y(f(x), f_0(x)) \leq c.$$

3. La función f es una cuasi-isometría si es una incrustación cuasi-isométrica para la cual existe una incrustación cuasi-inversa cuasi-isométrica, es decir, si existe una incrustación cuasi-isométrica $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ tiene distancia finita de id_X y $f \circ g$ tiene distancia finita de id_Y.

4. Los espacios métricos X e Y son cuasi-isométricos si existe una cuasi-isometría $X \to Y$; en este caso, escribimos $X \sim_{QI} Y$.

Observación 3.2. Toda isometría es una equivalencia bilipschitz, y toda equivalencia bilipschitz es una cuasi-isometría. En general, no se cumple la afirmación recíproca. En particular, observamos que:

1. En general, las cuasi-isometrías no son ni inyectivas ni sobreyectivas.

2. En general, las cuasi-isometrías no son continuas en absoluto.

3. En general, las cuasi-isometrías no tienen distancia finita a una isometría.

4. En general, las cuasi-isometrías no preservan la dimensión localmente.

Ejemplo 3.1. Considere lo siguientes ejemplos:

1. Todos los espacios métricos no vacíos de diámetro finito son cuasi-isométricos; el diámetro de un espacio métrico (X, d) es

$$\text{diam } X := \sup_{x,y \in X} d(x, y).$$

2. Recíprocamente, si un espacio es cuasi-isométrico a un espacio de diámetro finito, entonces también tiene diámetro finito. Por lo tanto, el espacio métrico $\mathbb{Z}$ (con la métrica inducida desde $\mathbb{R}$) no es cuasi-isométrico a un espacio métrico de diámetro finito.

3. Los espacios métricos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con respecto a la métrica euclidiana) no son cuasi-isométricos.

Una condición alternativa para definir las Cuasi-Isometría es la siguiente

Definición 3.5 (Imágen Cuasi-Densa)**.** Una aplicación $f : X \to Y$ tiene una imagen cuasi-densa (también llamada Gruesamente sobreyectiva) si existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $y \in Y$ se cumple que $\forall y \in Y, \exists x \in X$ con $d_Y(f(x), y) \leq c$.

Proposición 3.1. *Una función $f : X \to Y$ entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) es una cuasi-isometría si y solo si es una incrustación cuasi-isométrica con imagen cuasi-densa.*

Demostración. Ver anexo A. ■

Algunas otras propiedades útiles de las cuasi-isometrías son

Proposición 3.2. *Las siguientes son propiedades inherentes de las cuasi-isometrías:*

1. *Toda función a distancia finita de una incrustación cuasi-isométrica es una incrustación cuasi-isométrica.*

2. *Toda función a distancia finita de una cuasi-isometría es una cuasi-isometría.*

3. *Sean X, Y, Z espacios métricos y $f, f' : X \to Y$ que tienen distancia finita entre sí.*

   a) *Si $g : Z$ a X es una función, entonces $f \circ g$ y $f' \circ g$ también tienen distancia finita entre sí.*

   b) *Si $g : Y$ a Z es una incrustación cuasi-isométrica, entonces $g \circ f$ y $g \circ f'$ también tienen distancia finita entre sí.*

4. *Las composiciones de incrustaciones cuasi-isométricas son incrustaciones cuasi-isométricas, y las composiciones de incrustaciones bilipschitz son incrustaciones bilipschitz.*

5. *Las composiciones de cuasi-isometrías son cuasi-isometrías, y las composiciones de equivalencias bilipschitz son equivalencias bilipschitz.*

Demostración. Ver anexo A. ■

Observación 3.3. Sea QMet' la categoría cuyos objetos son espacios métricos, cuyos morfismos son incrustaciones cuasi-isométricas y donde la composición se define mediante la composición ordinaria de funciones. Para espacios métricos X e Y, la relación "tener distancia finita desde" es una relación de equivalencia en $\mathrm{Mor}_{\mathsf{QMet}'}(X,Y)$ y esta relación de equivalencia es compatible con la composición. Por lo tanto, podemos definir la categoría correspondiente QMet de la siguiente manera:

1. Los objetos en QMet son espacios métricos.
2. Para espacios métricos X e Y, el conjunto de morfismos de X a Y en QMet se define como
$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{QMet}}(X,Y) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{QMet}_0}(X,Y) \mod \text{distancia finita.}$$
3. Para espacios métricos X, Y e Z, la composición de morfismos en QMet se define como
$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{QMet}}(Z,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathsf{QMet}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathsf{QMet}}(X,Z), \quad [g],[f] \mapsto [g \circ f].$$

   Entonces, las cuasi-isometrías de espacios métricos corresponden a isomorfismos en la categoría QMet.

Dado que las cuasi-isometrías no son biyectivas en general, se debe tener cierto cuidado al definir los grupos de cuasi-isometrías de espacios métricos. Sin embargo, al observar la categoría QMet, obtenemos una definición natural de grupos de cuasi-isometrías:

Definición 3.6 (Grupo de cuasi-isometrías)**.** Sea X un espacio métrico. Entonces, el grupo de cuasi-isometrías de X se define como:

$$QI(X) := \mathrm{Aut}_{\mathsf{QMet}}(X),$$

es decir, el grupo de cuasi-isometrías de X, considerando las mismas hasta la distancia finita.

Inmediatamente tenemos que los espacios métricos cuasi-isométricos tienen grupos de cuasi-isometrías isomorfos.

Ejemplo 3.2 (Grupos de cuasi-isometrías)**.** Considere los siguientes ejemplos:

1. El grupo de cuasi-isometrías de un espacio métrico de diámetro finito es trivial, pues todas las posibles cuasi-isometrías son equivalentes a la identidad módulo distancia finita.
2. El grupo de cuasi-isometrías de $\mathbb{Z}$ es extenso; por ejemplo, contiene al grupo multiplicativo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ como subgrupo a través del homomorfismo inyectivo
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to QI(\mathbb{Z}) \\ \alpha &\mapsto (n \mapsto \lfloor \alpha \cdot n \rfloor) \end{aligned}$$

   junto con muchos grupos bastante grandes y no conmutativos.

3.2. Cuasi-Isometrías sobre Grupos

Dado un conjunto generador para cierto grupo, este proporciona una métrica en el grupo en cuestión al observar las longitudes de los caminos en el grafo de Cayley correspondiente. La noción geométrica a gran escala de quasi-isometría nos permite asociar tipos geométricos a grupos finitamente generados que no dependen de la elección de conjuntos generadores finitos.

Definición 3.7 (Métrica en un Grafo)**.** Sea $X = (V, E)$ un grafo conectado. Entonces, la función

$$V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

$$(v, w) \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{existe un camino de longitud } n \text{ que conecta } v \text{ y } w \text{ en } X\}$$

es una métrica en V, la métrica en V asociada con X.

Como dijimos anteriormente, la métrica anterior inducirá una métrica natural sobre un cierto grupo.

Definición 3.8 (Métrica de Palabra, Longitud de Palabra)**.** Sea G un grupo y sea $S \subset G$ un conjunto generador. La métrica de palabra d_S en G con respecto a S es la métrica en G asociada al grafo de Cayley $Cay(G, S)$. En otras palabras,

$$d_S(g, h) = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}, g^{-1} \cdot h = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n\}$$

para todo $g, h \in G$. La distancia $d_S(e, g)$ también se llama la longitud de palabra de g con respecto a S.

Ejemplo 3.3. Las métricas de palabra en $\mathbb{Z}$ correspondientes al conjunto generador $\{1\}$ coinciden con la métrica en $\mathbb{Z}$ inducida por la métrica estándar en $\mathbb{R}$. Por otro lado, en la métrica de palabra en $\mathbb{Z}$ correspondiente al conjunto generador $\mathbb{Z}$, todos los elementos del grupo tienen distancia 1.

En general, las métricas de palabras en un grupo dado dependen de los conjuntos de generadores elegidos. Sin embargo, la diferencia es despreciable cuando se observa el grupo desde lejos:

Teorema 3.1. *Sea G un grupo finitamente generado con generadores S, S':*

1. *Entonces, el mapa identidad id_G es una equivalencia bilipschitz entre (G, d_S) y $(G, d_{S'})$.*
2. *En particular, cualquier espacio métrico (X, d) que sea equivalente bilipschitz [o cuasi-isométrico] a (G, d_S) también es equivalente bilipschitz [o cuasi-isométrico, respectivamente] a $(G, d_{S'})$ (a través de los mismos mapas).*

Demostración. La segunda parte se sigue directamente de la primera parte porque la composición de equivalencias bilipschitz es una equivalencia bilipschitz y la composición de quasi-isometrías es una quasi-isometría.
Por lo tanto, queda por demostrar la primera parte: Dado que S es finito, el máximo

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

es finito. Sean $g, h \in G$ y sea $n := d_S(g, h)$. Entonces podemos escribir $g^{-1} \cdot h$ como $s_1 \cdot s_2 ... s_n$ para ciertos $s_1, s_2, ..., s_n \in S \cup S^{-1}$. Utilizando la desigualdad triangular y el hecho de que la métrica $d_{S'}$ es invariante por la izquierda por definición, obtenemos

$$\begin{aligned} d_{S'}(g,h) &= d_{S'}(g, g \cdot s_1 \cdot s_2 \cdots s_n) \\ &\leq d_{S'}(g, g \cdot s_1) + d_{S'}(g \cdot s_1, g \cdot s_1 \cdot s_2) + \ldots + d_{S'}(g \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}, g \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \ldots + d_{S'}(e, s_n) \leq c \cdot n \\ &= c \cdot d_S(g,h). \end{aligned}$$

Intercambiando los roles de S y S' muestra que una estimación similar también se cumple en la otra dirección y, por lo tanto, $id_G : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ es una equivalencia bilipschitz. ■

Definición 3.9 (Tipo de quasi-isometría de grupos finitamente generados)**.** Sea G un grupo finitamente generado.

1. Si el grupo G es equivalente bilipschitz a un espacio métrico X si para algún (y por lo tanto todo) conjunto generador finito S de G, los espacios métricos (G, d_S) y X son equivalentes bilipschitz.

2. Si el grupo G es quasi-isométrico a un espacio métrico X si para algún (y por lo tanto todo) conjunto generador finito S de G, los espacios métricos (G, d_S) y X son quasi-isométricos. Escribimos $G \sim_{QI} X$ si G y X son quasi-isométricos.

De manera análoga, definimos cuándo dos grupos finitamente generados se llaman equivalentes bilipschitz o quasi-isométricos.

Ejemplo 3.4 ($\mathbb{Z}^n \sim_{QI} \mathbb{R}^n$)**.** Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el grupo $\mathbb{Z}^n$ es cuasi-isométrico al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ porque la inclusión $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es una incrustación cuasi-isométrica con imagen cuasi-densa. En este sentido, los grafos de Cayley de $\mathbb{Z}^n$ (con respecto a conjuntos generadores finitos) se asemejan a la geometría de $\mathbb{R}^n$.

En este punto, podría ser más natural considerar la equivalencia bilipschitz de grupos como una buena equivalencia geométrica de grupos finitamente generados. La cuestión de cómo se relacionan la quasi-isometría y la equivalencia bilipschitz en grupos finitamente generados conduce a problemas interesantes y aplicaciones útiles.

Teorema 3.2. *Las cuasi-isometrías biyectivas entre grupos finitamente generados (con respecto a la métrica de palabra de ciertos conjuntos generadores finitos) son equivalencias bilipschitz.*

Demostración. La prueba se basa en el hecho de que la distancia mínima no trivial entre dos elementos del grupo es 1; luego se pueden intercambiar las constantes aditivas en una quasi-isometría biyectiva por una contribución en las constantes multiplicativas. ■

Sin embargo, no todos los grupos infinitos finitamente generados que son quasi-isométricos son equivalentes bilipschitz.
Como ejemplo simple, comenzamos con la clasificación de quasi-isometría de grupos finitos:

Ejemplo 3.5 (Clasificación de Cuasi-Isometría de Grupos Finitos)**.** Un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a un grupo finito si y solo si es finito: Todos los grupos finitos conducen a espacios métricos de diámetro finito, por lo que todos son cuasi-isométricos. Por otro lado, si un grupo es cuasi-isométrico a un grupo finito, entonces tiene un diámetro finito con respecto a alguna métrica de palabra de un conjunto generador finito; debido a que las bolas de radio finito con respecto a métricas de palabra de conjuntos generadores finitos son finitas, se sigue que el grupo en cuestión tiene que ser finito. En contraste, los grupos finitos son equivalentes bilipschitz si y solo si tienen el mismo número de elementos.

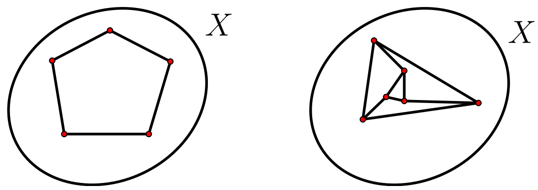


Figura 3.1: Equivalencia cuasi-isométrica de grupos finitos

Observación 3.4. Sea G un grupo y $S \subset G$ un conjunto generador. Entonces, S es finito si y solo si la métrica de palabra d_S en G es propia en el sentido de que todos los conjuntos de bolas de radio finito en (G, d_S) son finitos: Si S es infinito, entonces la bola de radio 1 alrededor del elemento neutro de G contiene $|S|$ elementos, lo cual es infinito. Por otro lado, si S es finito, entonces cada bola B de radio finito n alrededor del elemento neutro contiene solo finitos elementos, porque el conjunto $(S \cup S^{-1})^n$ es finito y existe un mapa sobreyectivo $(S \cup S^{-1})^n \to B$; dado que la métrica d_S es invariante bajo la acción de traslación izquierda de G, se sigue que todas las bolas en (G, d_S) de radio finito son finitas.

En la clasificación geométrica de grupos, los grupos finitos son una pequeña fracción. Es por ello que, esta teoría centra sus esfuerzos en grupos infinitos.
El siguiente paso es examinar grupos que son (o no son) quasi-isométricos a $\mathbb{Z}$:

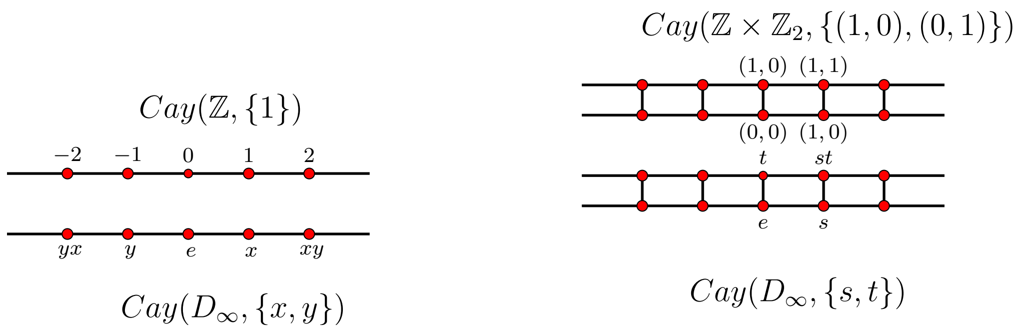
Ejemplo 3.6 (Algunos grupos cuasi-isométricos a $\mathbb{Z}$)**.** Los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$, y D_∞ son equivalentes bilipschitz, y por lo tanto, en particular, cuasi-isométricos.
Para ver esto, consideramos las siguientes dos presentaciones del grupo diedral infinito D_∞:

$$\langle x, y \,|\, x^2, y^2 \rangle \cong D_\infty \cong \langle s, t \,|\, t^2, tst^{-1} = s^{-1} \rangle.$$

El grafo de Cayley $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{x, y\})$ es isomorfo a $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$; en particular, D_∞ y $\mathbb{Z}$ son equivalentes bilipschitz. Por otro lado, el grafo de Cayley $\mathrm{Cay}(D_\infty, s, t)$ es isomorfo a $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, [0]), (0, [1])\})$; en particular, D_∞ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ son equivalentes bilipschitz. Dado que las métricas de palabras en D_∞ correspondientes a los conjuntos generadores $\{x, y\}$ y $\{s, t\}$ son equivalentes bilipschitz, se sigue que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ también son equivalentes bilipschitz.

Observación 3.5. A pesar de que $\mathbb{Z}$ y D_∞, así como D_∞ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$, admiten conjuntos generadores finitos con grafos de Cayley isomorfos, los grupos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ no admiten conjuntos generadores finitos con grafos de Cayley isomorfos. Más generalmente, los grupos abelianos finitamente generados admiten grafos de Cayley isomorfos si y solo si tienen la misma rango y si la parte de torsión tiene la misma cardinalidad.

Uno de los objetivos principales de la teoría geométrica de grupos es comprender tanto como sea posible la clasificación por quasi-isometría de los grupos finitamente generados



(a) $\mathbb{Z} \cong D_\infty$

(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \cong D_\infty$

Figura 3.2

3.3. Espacios Cuasi-Geodésicos

En geometría métrica, es útil requerir que la métrica en el espacio en cuestión sea (cuasi) geodésica, es decir, que su métrica pueda ser realizada (con un error uniforme) por trayectorias.

Definición 3.10 (Espacio Geodésico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Para $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, una geodésica de longitud L en X es una incrustación isométrica $\gamma : [0, L] \to X$, donde el intervalo $[0, L]$ lleva la métrica inducida por la métrica estándar en $\mathbb{R}$; el punto $\gamma(0)$ es el punto de inicio de γ, y $\gamma(L)$ es el punto final de γ.

2. El espacio métrico X se llama geodésico si para todo $x, x_0 \in X$ existe una geodésica en X con punto de inicio x y punto final x_0.

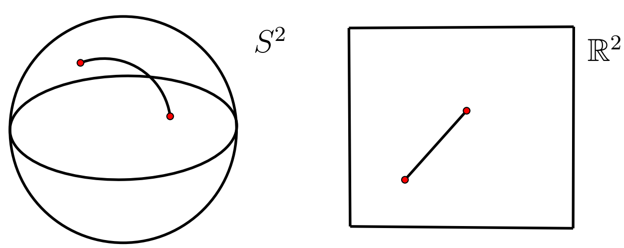


Figura 3.3: Ejemplos de espacios Geodésicos

Ejemplo 3.7 (Espacios Geodésicos)**.** Las siguientes afirmaciones ilustran el concepto de geodésica

1. Para $n \in \mathbb{N}$, las geodésicas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ son precisamente los segmentos de línea euclidianos (parametrizados mediante un vector de longitud unitaria). Dado que cualquier par de puntos en $\mathbb{R}^n$ puede ser unido por un segmento de línea, el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es geodésico.

2. El espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotado de la métrica inducida desde la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$ no es geodésico.

3. La esfera S^2 con la métrica riemanniana estándar es un espacio métrico geodésico. Las geodésicas son partes de grandes círculos en S^2. Sin embargo, los puntos antipodales pueden ser unidos por infinitas geodésicas diferentes.

4. El plano hiperbólico H^2 es un espacio métrico geodésico. En el modelo del disco de Poincaré, las geodésicas son partes de círculos que intersectan el círculo límite de manera ortogonal.

Los grupos finitamente generados junto con una métrica de palabras que proviene de un conjunto generador finito no son geodésicos (si el grupo en cuestión no es trivial), ya que el espacio métrico subyacente es discreto. Sin embargo, son geodésicos en el sentido de la geometría a gran escala:

Definición 3.11 (Espacio Cuasi-Geodésico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico, sea $c \in \mathbb{R}_{>0}$, y sea $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

1. Entonces, una (c, b)-cuasi-geodésica en X es una incrustación $(c, b)-$cuasi-isométrica $\gamma : I \to X$, donde $I = [t, t_0] \subset \mathbb{R}$ es algún intervalo cerrado; el punto $\gamma(t)$ es el punto de inicio de γ, y $\gamma(t_0)$ es el punto final de γ.

2. El espacio X es (c, b)-cuasi-geodésico si para todo $x, x_0 \in X$ existe una (c, b)-cuasi-geodésica en X con punto de inicio x y punto final x_0.

Cada espacio geodésico también es un espacio $(1, 0)$-cuasi-geodésico; sin embargo, no todos los espacios cuasi-geodésicos son geodésicos:

Ejemplo 3.8 (Espacios Cuasi-Geodésicos)**.** 1. Si $X = (V, E)$ es un grafo conectado, entonces la métrica asociada en V convierte a V en un espacio (1, 1)-geodésico: La distancia entre dos vértices se realiza como la longitud de algún camino teórico en el grafo X, y cada camino en el grafo X que realiza la distancia entre dos vértices produce una (1, 1)-cuasi-geodésica (con respecto a una parametrización adecuada).

2. En particular: Si G es un grupo y S es un conjunto generador de G, entonces (G, d_S) es un espacio (1, 1)-cuasi-geodésico.

3. Para cada $\varepsilon > 0$, el espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es (1, ε)-cuasi-geodésico con respecto a la métrica inducida desde la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$.

3.4. Geodesificación vía Realización geométrica de Gráficas

A veces es más conveniente argumentar a través de geodésicas que a través de cuasi-geodésicas. Por lo tanto, explicamos cómo podemos asociar un espacio geodésico con un grafo conectado y cómo los espacios cuasi-geodésicos pueden ser reemplazados por espacios geodésicos a través de grafos:

En términos generales, la realización geométrica de un grafo se obtiene pegando un intervalo unitario entre cada par de vértices que están conectados por una arista en el grafo dado. Esta construcción se puede convertir en un espacio métrico al combinar la métrica estándar en el intervalo unitario con la métrica definida combinatoriamente en los vértices según la estructura del grafo. Un pequeño punto técnico es que el intervalo unitario está dirigido, mientras que nuestros grafos no lo son. Una alternativa sería elegir una orientación del grafo dado (y luego demostrar que la realización no depende de la orientación elegida); resolvemos este problema reemplazando cada arista no dirigida por las dos aristas dirigidas correspondientes e identificando los intervalos correspondientes en consecuencia.

Definición 3.12 (Realización Geométrica de Grafos)**.** Sea $X = (V, E)$ un grafo conectado. La realización geométrica de X es el espacio métrico $|X|, d_{|X|}$ definido de la siguiente manera:
Si $E = \emptyset$, entonces X siendo conectado implica que $|V| \leq 1$; en este caso, definimos $|X| := V$ y establecemos $d_{|X|} := 0$.
Si $E \neq \emptyset$, cada vértice de X se encuentra en al menos una arista, y definimos

$$|X| := \tilde{E} \times [0, 1]/ \sim .$$

Aquí,

$$\tilde{E} := \{(u, v) \mid u, v \in V, \{u, v\} \in E\}$$

es el conjunto de todas las aristas dirigidas (para cada arista no orientada $\{u, v\} = \{v, u\}$ obtenemos dos aristas dirigidas (u, v) y (v, u)), y la relación de equivalencia $\sim$ se define de la siguiente manera:
Para todos $((u, v), t)$, $((u_0, v_0), t_0) \in \tilde{E}$, tenemos que $((u, v), t) \sim ((u_0, v_0), t_0)$ si y solo si ocurre una de las siguientes

1. los elementos coinciden, es decir, $((u, v), t) = ((u_0, v_0), t_0)$,
2. los elementos describen el mismo vértice que se encuentra en ambas aristas, es decir,
   a) $u = u_0$ y $t = 0 = t_0$,
   b) $u = v_0$ y $t = 0$ y $t_0 = 1$,
   c) $v = v_0$ y $t = 1 = t_0$,
   d) $v = u_0$ y $t = 1$ y $t_0 = 0$,
3. los elementos describen el mismo punto en una arista pero utilizando diferentes orientaciones, es decir, $(u, v) = (v_0, u_0)$ y $t = 1 - t_0$.

La métrica $d_{|X|}$ en $|X|$ se define como

$$d_{|X|}(((u, v), t), ((u_0, v_0), t_0)) := \begin{cases} |t - t_0| & \text{si } (u, v) = (u_0, v_0) \\ \text{mín} \left\{ \begin{array}{c} t + d_X(u, u_0) + t_0, \\ t + d_X(u, v_0) + 1 - t_0, \\ 1 - t + d_X(v, u_0) + t_0, \\ 1 - t + d_X(v, v_0) + 1 - t_0 \end{array} \right\} & \text{si } \{u, v\} \neq \{u_0, v_0\} \\ |t - (1 - t_0)| & \text{si } (u, v) = (v_0, u_0) \end{cases}$$

para todos $[((u, v), t)]$, $[((u_0, v_0), t_0)] \in |X|$, donde d_X denota la métrica en V inducida a partir de la estructura del grafo.

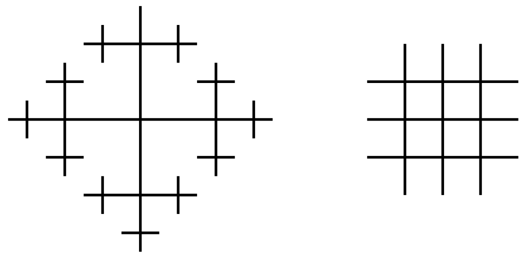


Figura 3.4: Realización geométrica de F_2 y $\mathbb{Z}_2$

Observación 3.6. Esta construcción se puede extender para formar un *funtor* desde la categoría de grafos hasta la categoría de espacios métricos. Por lo tanto, cada acción de un grupo en un grafo induce una correspondiente acción isométrica lineal por partes del grupo en la realización geométrica del grafo dado. No es difícil ver que la acción inducida es libre (tiene un punto fijo global) si y solo si la acción original en el grafo es libre (tiene un punto fijo global).

Ejemplo 3.9 (Realizaciones geométricas)**.** Ejemplos de Realizaciones geométricas

1. La realización geométrica del grafo $(\{0,1\},\{\{0,1\}\})$, que consta de dos vértices y una arista que los une, es isométrica al intervalo unitario.
2. La realización geométrica de $Cay(\mathbb{Z},\{1\})$ es isométrica a la recta real $\mathbb{R}$ con la métrica estándar.
3. La realización geométrica de $Cay(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\})$ es isométrica a la retícula cuadrada $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ con la métrica inducida por la métrica ℓ^1 en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 3.3 (Realización geométrica de grafos)**.** *Sea $X=(V,E)$ un grafo conexo.*

1. *Entonces la realización geométrica $(|X|,d_{|X|})$ es un espacio métrico geodésico.*
2. *Existe una inclusión canónica $V\to|X|$ y esta función es una incrustación isométrica y una cuasi-isometría.*

Demostración. Ambas afirmaciones son claras (Falta completar). ■

Teorema 3.3. *Sea G un grupo finitamente generado y S y S' dos conjuntos finitos de generadores. Entonces, la realización geométrica de $Cay(G,S)$ es cuasi-isométrica a la realización geométrica de $Cay(G,S')$.*

Demostración. La aplicación $\phi : Cay(G,S)\to(G,d_S)$, donde x se asigna al vértice más cercano, haciendo una elección cuando x es el punto medio de una arista, es una cuasi-isometría $(1,0)$, y la aplicación $\psi : (G,d_{S'})\to Cay(G,S')$ es una cuasi-isometría $(1,1)$. Vimos que el mapa identidad $Id_G : (G,d_S)\to(G,d_{S'})$ es una cuasi-isometría y, dado que la composición de cuasi-isometrías es una cuasi-isometría, entonces $\psi\circ Id_G\circ\phi : Cay(G,S)\to Cay(G,S')$ es una cuasi-isometría. ■

Más generalmente, cualquier espacio cuasi-geodésico puede ser aproximado por un espacio geodésico (figura 3.5). Para cerrar esta sección presentamos el siguiente resultado:

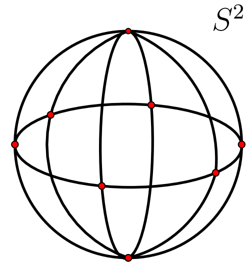


Figura 3.5: Ejemplo de aproximación cuasi-geodésica en S^2

Teorema 3.4 (Aproximación de espacios cuasi-geodésicos por espacios geodésicos)**.** *Sea X un espacio métrico cuasi-geodésico. Entonces existe un espacio métrico geodésico que es cuasi-isométrico a X.*

Demostración. A partir de X, podemos definir un grafo Y de la siguiente manera:
Los vértices de Y son los puntos de X. Dos puntos de X están unidos por una arista en Y si están lo suficientemente cerca entre sí (esto depende de las constantes de cuasi-geodesia para X). Luego, el mapeo de puntos en X a los vértices correspondientes en Y es una cuasi-isometría. Por otro lado, $Y \sim_{QI} |Y|$.
Por lo tanto, X y $|Y|$ son cuasi-isométricos. Además, $|Y|$ es un espacio métrico geodésico. ∎

3.5. El Lema de Svarc–Milnor

¿Por qué deberíamos estar interesados en comprender cómo lucen los grupos finitamente generados en términos de quasi-isometría? Una primera respuesta a esta pregunta se encuentra en el lema de Svarc-Milnor, que es uno de los ingredientes clave que vinculan la geometría de los grupos con la geometría de espacios que surgen naturalmente en la geometría y la topología.
El lema de Svarc-Milnor básicamente afirma que dada una acción *buena* de un grupo en un espacio métrico *bueno*, podemos concluir que el grupo es finitamente generado y que el grupo es quasi-isométrico al espacio métrico dado. En la práctica, este resultado puede aplicarse en ambas direcciones: si queremos conocer más acerca de la geometría de un grupo o si deseamos saber que un grupo dado es finitamente generado, basta con exhibir una acción *buena* de este grupo en un espacio adecuado. De manera recíproca, si deseamos conocer más sobre un espacio métrico, es suficiente encontrar una acción *buena* de un grupo bien conocido y apropiado. Por lo tanto, el lema de Svarc-Milnor también se conoce como el *lema fundamental de la teoría geométrica de grupos.*
Comenzamos con una formulación métrica del lema de Svarc-Milnor para espacios cuasi-geodésicos; en un segundo paso, deduciremos una versión más topológica, la versión comúnmente utilizada en aplicaciones.

Teorema 3.5 (Lema de Svarc-Milnor)**.** *Sea G un grupo y tal que G actúa sobre un espacio métrico (X, d) por isometrías. Supongamos que existen constantes c y $b \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que X es (c, b)-cuasi-geodésico y supongamos que hay un subconjunto $B \subset X$ con las siguientes propiedades:*

1. *El diámetro de B es finito.*

2. *Las traslaciones G de B cubren todo X, es decir,*

$$\bigcup_{g\in G} g\cdot B = X.$$

3. *El conjunto $S := \{g \in G | g\cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ es finito, donde*

$$B' := B^{X,d}_{2\cdot b}(B) = \{x \in X : \exists y \in B \ t.q\ d(x,y) \leq 2\cdot b\}.$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *El grupo G está generado por S; en particular, G es finitamente generado.*

2. *Para todo $x \in X$, el mapa asociado*

$$\begin{aligned} G &\to X \\ g &\mapsto g\cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría (con respecto a la métrica de palabras d_S en G).

Demostración. Haremos la demostración en dos partes:
El conjunto S genera G: Dado $g \in G$, mostramos que $g \in \langle S\rangle$ utilizando una cuasi-geodésica adecuada y siguiendo las traslaciones de B a lo largo de esta cuasi-geodésica: Sea $x \in B$. Dado que X es $(c,b)-$cuasi-geodésico, existe una (c,b)-cuasi-geodésica $\gamma : [0,L] \to X$ que comienza en x y termina en $g\cdot x$. Ahora observamos puntos lo suficientemente cercanos en esta cuasi-geodésica:
Sea $n := \lceil \frac{L\cdot c}{b} \rceil$. Para $j \in \{0,\dots,n-1\}$ definimos

$$t_j := j\cdot \frac{b}{c},$$

y $t_n := L$, así como

$$x_j := \gamma(t_j);$$

nota que $x_0 = \gamma(0) = x$ y $x_n = \gamma(L) = g\cdot x$. Dado que las traslaciones de B cubren todo X, existen elementos del grupo $g_j \in G$ con $x_j \in g_j \cdot B$; en particular, podemos elegir $g_0 := e$ y $g_n := g$.
Para todo $j \in \{1,\dots,n\}$, el elemento del grupo $s_j := g_{j-1}^{-1}\cdot g_j$ pertenece a S: Como γ es una cuasi-geodésica (c,b), obtenemos

$$d(x_{j-1},x_j) \leq c\cdot |t_{j-1}-t_j| + b \leq c\cdot \frac{b}{c} + b \leq 2\cdot b.$$

Por lo tanto

$$x_j \in B^{2\cdot b}_{X,d}(g_{j-1}\cdot B) = g_{j-1}\cdot B^{2\cdot b}_{X,d}(B) = g_{j-1}\cdot B',$$

en la penúltima igualdad utilizamos que G actúa sobre X mediante isometrías. Por otro lado, $x_j \in g_j\cdot B \subset g_j\cdot B'$ y, por lo tanto

$$g_{j-1}\cdot B' \cap g_j \cdot B' \neq \emptyset;$$

así que, por la definición de S, se sigue que $s_j = g_{j-1}^{-1} \cdot g_j \in S$.
En particular,

$$g = g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-1}^{-1} \cdot g_n = \ldots = g_0 \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$$

pertenece al subgrupo generado por S, como se deseaba.
El grupo G es cuasi-isométrico a X: Tomemos $x \in X$. Demostramos que el mapa

$$\varphi : G \to X, \quad g \mapsto g \cdot x$$

es una cuasi-isometría mostrando que es una incrustación cuasi-isométrica con imagen cuasi-densa. Primero notemos que dado que G actúa por isometrías en X y dado que las traslaciones de B cubren todo X, podemos asumir que B contiene a x (de modo que estamos en la misma situación que en la primera parte de la prueba).
El mapa φ tiene imagen cuasi-densa: Si $x_0 \in X$, entonces existe un $g \in G$ con $x_0 \in g \cdot B$. Luego, $g \cdot x \in g \cdot B$ da lugar a

$$d(x_0, \varphi(g)) = d(x_0, g \cdot x) \leq \operatorname{diam}(g \cdot B) = \operatorname{diam}(B),$$

lo cual se supone que es finito. Por lo tanto, φ tiene una imagen cuasi-densa.
El mapa φ es una incrustación cuasi-isométrica, porque: Tomemos $g \in G$. Primero, damos una cota uniforme inferior de $d(\varphi(e), \varphi(g))$ en función de $d_S(e, g)$. Como antes, sea $\gamma : [0, L] \to X$ una $(c, b)-$cuasi-geodésica desde x hasta $g \cdot x$. Luego, el argumento de la primera parte de la prueba (y la definición de n) muestra que

$$\begin{aligned}
d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, g \cdot x) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \\
&\geq \frac{1}{c} \cdot L - b \\
&\geq \frac{1}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot (n-1) - b \\
&\geq \frac{b}{c^2} \cdot n - \frac{b}{c^2} - b \\
&\geq \frac{b}{c^2} \cdot d_S(e, g) - \frac{b}{c^2} - b.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, obtenemos una cota uniforme superior de $d(\varphi(e), \varphi(g))$ en términos de la longitud de palabra $d_S(e, g)$ de la siguiente manera: Supongamos que $d_S(e, g) = n$. Entonces, existen $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1} = S$ con $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. Luego, utilizando la desigualdad triangular, el hecho de que G actúa isométricamente en X y el hecho de que $s_j \cdot B_0 \cap B_0 \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, g \cdot x) \\
&\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 \cdot s_2 \cdot x) + \ldots + d(s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n-1} \cdot x, s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \cdot x) \\
&= d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_2 \cdot x) + \ldots + d(x, s_n \cdot x) \\
&\leq n \cdot 2 \cdot (\operatorname{diam} B + 2 \cdot b) \\
&= 2 \cdot (\operatorname{diam} B + 2 \cdot b) \cdot d_S(e, g).
\end{aligned}$$

Recordando que, se supone que la diámetro de B es finito. Dado que

$$d(\varphi(g), \varphi(h)) = d(\varphi(e), \varphi(g^{-1} \cdot h)), \quad d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1} \cdot h),$$

se cumplen para todos los $g, h \in G$, entonces φ es una incrustación cuasi-isométrica. ■

La prueba del lema de Svarc–Milnor solo proporciona una cuasi-isometría, no una equivalencia bilipschitz. De hecho, la acción de traslación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ muestra que no hay un análogo obvio del lema de Svarc–Milnor para equivalencia bilipschitz. Por lo tanto, en contextos geométricos, la cuasi-isometría de grupos finitamente generados se considera una noción más apropiada que la equivalencia bilipschitz.

En muchos casos, se utiliza una formulación topológica del lema de Svarc–Milnor. Antes de deducir esta versión de la versión cuasi-isométrica, recordemos brevemente las nociones topológicas que aparecen en la declaración:

1. Un espacio métrico X es propio si, para todo $x \in X$ y todo $r \in \mathbb{R} > 0$, la bola cerrada $\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ es compacta con respecto a la topología inducida por la métrica. Por lo tanto, los espacios métricos propios son localmente compactos.

2. Una acción $G \times X \to X$ de un grupo G en un espacio topológico X (por ejemplo, con la topología derivada de una métrica en X) es propia si, para todos los conjuntos compactos $B \subset X$, el conjunto $\{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \varnothing\}$ es finito.

   Ejemplo 3.10. Ejemplos de acciones propias:

   a) La acción de traslación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ es propia (con respecto a la topología estándar en $\mathbb{R}$).

   b) Más en general, la acción por transformaciones de cubierta del grupo fundamental de un espacio topológico localmente compacto y conexo por trayectorias (que admite una cubierta universal) en su cubierta universal es propia.

   c) Todos los grupos estabilizadores de una acción propia son finitos. La recíproca no necesariamente es cierta: por ejemplo, la acción de $\mathbb{Z}$ en el círculo S^1 dada por rotación por un ángulo irracional es libre pero no propia (porque $\mathbb{Z}$ es infinito y S^1 es compacto).

3. Una acción $G \times X \to X$ de un grupo G en un espacio topológico X se dice co-compacta si el espacio cociente $G \setminus X$ es compacto con respecto a la topología cociente.

   Ejemplo 3.11. Ejemplos de acciones co-compactas

   a) La acción de traslación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ es co-compacta (con respecto a la topología estándar en $\mathbb{R}$), porque el cociente es homeomorfo al círculo S^1, que es compacto.

   b) Más en general, la acción por transformaciones de cubierta del grupo fundamental de un espacio topológico compacto, conexo por trayectorias X (que admite una cubierta universal) en su cubierta universal es co-compacta, ya que el cociente es homeomorfo a X (Ejemplo 4.1.13).

c) La acción de traslación (horizontal) de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}^2$ no es co-compacta (con respecto a la topología estándar en $\mathbb{R}^2$), porque el cociente es homeomorfo al cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$, que no es compacto.

d) La acción de SL(2, $\mathbb{Z}$) mediante transformaciones de Möbius, es decir, a través de

$$SL(2, \mathbb{Z}) \times H \to H, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

en el semiplano superior $H := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ (Apéndice A.3), no es co-compacta.

Con lo anterior enunciamos una nueva versión del Lema de Svarc-Milnor:

Corolario 3.1 (Lema de Svarc-Milnor, Formulación topológica)**.** *Sea G un grupo que actúa mediante isometrías en un espacio métrico X (no vacío) que es propio y geodésico. Además, supongamos que esta acción es propia y co-compacta. Entonces, G es finitamente generado y, para todo $x \in X$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría.

Demostración. Bajo las suposiciones dadas, el espacio métrico X es $(1, b)$-cuasi-geodésico para todo $b \in \mathbb{R}^+$. Para poder aplicar el Lema de Svarc-Milnor, necesitamos encontrar un subconjunto adecuado $B \subset X$. Dado que la proyección $\pi : X \to G \setminus X$ asociada con la acción es una aplicación abierta y debido a que $G \setminus X$ es compacto, es fácil encontrar un subespacio cerrado $B \subset X$ con diámetro finito tal que $\pi(B) = G \setminus X$ (por ejemplo, una unión adecuada de bolas cerradas finitas).
En particular, $S_{g \in G} g \cdot B = X$ y $B_0 := B_{2b}(B)$ tiene diámetro finito. Dado que X es un espacio propio, el subconjunto B_0 es compacto. Por lo tanto, la acción de G en X siendo propia implica que el conjunto $\{g \in G \mid g \cdot B_0 \cap B_0 \neq \varnothing\}$ es finito.
Por lo tanto, podemos aplicar el Lema de Svarc-Milnor. ■

3.6. Invariantes cuasi-isométricos y rigidez

El problema central de clasificación en la teoría geométrica de grupos es clasificar grupos finitamente generados hasta cuasi-isometría. Como hemos visto en las secciones anteriores, saber que ciertos grupos no son cuasi-isométricos conduce a consecuencias interesantes en la teoría de grupos, topología y geometría.
Aunque una clasificación completa de grupos finitamente generados hasta cuasi-isometría está fuera de nuestro alcance, podemos obtener resultados parciales. Un principio general para obtener resultados parciales de clasificación es construir invariantes adecuados.
Comenzamos con el caso más simple, es decir, invariantes de cuasi-isometría con valores en conjuntos:

Definición 3.13 (Invariantes de cuasi-isometría)**.** Sea V un conjunto. Un invariante de cuasi-isometría con valores en V es una función I desde la clase de todos los grupos finitamente generados a V, tal que todos los grupos finitamente generados G, H con $G \sim_{QI} H$ satisfacen

$$I(G) = I(H).$$

Observación 3.7. Sea V un conjunto y sea I un invariante de cuasi-isometría con valores en V, y sean G y H grupos finitamente generados con $I(G) \neq I(H)$. Entonces, G y H no son cuasi-isométricos.

Así que, cuantos más invariantes de cuasi-isometría podamos encontrar, más grupos finitamente generados podemos distinguir hasta la cuasi-isometría.

Observación 3.8. Si I es un invariante de cuasi-isometría de grupos finitamente generados, y G y H son grupos finitamente generados con $I(G) = I(H)$, entonces en general no podemos deducir que G y H sean cuasi-isométricos.

Algunos ejemplos básicos de invariantes de cuasi-isometría son los siguientes:

Ejemplo 3.12. Veamos los siguiente ejemplos:

1. El invariante trivial. Sea V un conjunto que contiene exactamente un elemento, y sea I la función que asocia a cada grupo finitamente generado ese único elemento. Se puede ver, I es un invariante de cuasi-isometría, aunque no contiene información interesante.

2. Finitud. Sea $V := \{0, 1\}$, y sea I la función que envía todos los grupos finitos a 0 y todos los grupos finitamente generados infinitos a 1. Entonces, I es un invariante de cuasi-isometría, ya que un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a un grupo finito si y solo si es finito.

3. Rango de grupos libres. Sea $V := \mathbb{N}$, y sea I la función de la clase de todos los grupos libres finitamente generados a V que asocia a un grupo libre finitamente generado su rango. Entonces, I no es un invariante de cuasi-isometría en la clase de todos los grupos libres finitamente generados, porque los grupos libres de rango 2 y rango 3 son cuasi-isométricos.

Para obtener resultados de clasificación interesantes, necesitamos más invariantes de cuasi-isometría. En los capítulos siguientes, estudiaremos, por ejemplo

1. el crecimiento de grupos,

2. la hiperbolicidad,

3. los extremos de grupos (es decir, la geometría en el infinito),

4. la amenabilidad.

Si un invariante de cuasi-isometría tiene solo un rango contable de valores posibles, entonces no será un invariante completo: existen innumerables clases de cuasi-isometría de grupos finitamente generados. Este hecho puede ser demostrado, por ejemplo, produciendo innumerables tipos de crecimiento diferentes de grupos o a través de la teoría de cancelación pequeña y la geometría de lazos en grafos de Cayley.
En la teoría geométrica de grupos, es común utilizar el siguiente término:

Definición 3.14 (Propiedad geométrica de grupos)**.** Sea P una propiedad de grupos finitamente generados (es decir, cada grupo finitamente generado satisface o no satisface P; más formalmente, P es una subclase de la clase de grupos finitamente generados). Decimos que P es una propiedad geométrica de grupos si se cumple lo siguiente para todos los grupos finitamente generados G y H: Si G satisface P y H es cuasi-isométrico a G, entonces H también satisface P (es decir, si *tener la propiedad* P es un invariante de cuasi-isometría).

Ejemplo 3.13. Algunas propiedades geométricas de grupos

1. Ser finito es una propiedad geométrica de grupos.

2. Ser abeliano no es una propiedad geométrica de grupos: por ejemplo, el grupo trivial y el grupo simétrico S_3 son cuasi-isométricos (porque ambos son finitos), pero el grupo trivial es abeliano y S_3 no es abeliano.

Definición 3.15 (Virtualmente)**.** Sea P una propiedad de grupos. Un grupo es virtualmente P si contiene un subgrupo de índice finito que tiene la propiedad P.

Sorprendentemente, existen muchas propiedades interesantes (¡muchas de ellas puramente algebraicas!) de grupos que son geométricas. Enumeramos solo los casos más básicos:

1. Ser virtualmente cíclico infinito es una propiedad geométrica .

2. Más generalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la propiedad de ser virtualmente $\mathbb{Z}^n$ es geométrica.

3. Ser finitamente generado y virtualmente libre es una propiedad geométrica.

4. Ser finitamente generado y virtualmente nilpotente es una propiedad geométrica de grupos.

5. Ser finitamente presentado es una propiedad geométrica de grupos.

Demostrar que estas propiedades son geométricas está lejos de ser fácil y escapa del alcance de este trabajo. Que una cierta propiedad algebraica de grupos resulte ser geométrica es una instancia de un fenómeno de rigidez; así, por ejemplo, el hecho de que ser virtualmente cíclico infinito sea una propiedad geométrica también puede formularse como el grupo $\mathbb{Z}$ siendo cuasi-isométricamente rígido.

4. Temas centrales de la Teoría Geométrica de Grupos.

En esta última sección, nos encargaremos de presentar, a manera de introducción, los ejes centrales en el estudio de la Teoría Geométrica de Grupos. No profundizamos en ellos, simplemente presentamos las definiciones más importantes e invitamos al lector a leer por su cuenta. Los siguientes temas han sido mencionados en páginas anteriores. Principalmente, estudian el comportamiento de los grupos, algunos invariantes, etc.

4.1. Tipos de Crecimiento en grupos

El primer invariante de cuasi-isometría que discutimos en detalle es el tipo de crecimiento. Básicamente, medimos el *volumen* de las bolas en un grupo finitamente generado dado y estudiamos el comportamiento asintótico cuando el radio tiende a infinito.
Comenzaremos introduciendo las funciones de crecimiento para grupos finitamente generados (con respecto a conjuntos generadores finitos); aunque estas funciones de crecimiento dependen del conjunto generador finito elegido, un cálculo sencillo muestra que las funciones de crecimiento para conjuntos generadores finitos diferentes solo difieren en una cantidad pequeña, y en general, las funciones de crecimiento de grupos cuasi-isométricos son equivalentes asintóticamente. Esto nos lleva al concepto de tipo de crecimiento de un grupo finitamente generado.
La invarianza de cuasi-isometría del tipo de crecimiento nos permite demostrar que muchos grupos no son cuasi-isométricos.
Sorprendentemente, tener un crecimiento polinómico es una restricción bastante fuerte para grupos finitamente generados: según el teorema de crecimiento polinómico de Gromov, ¡todos los grupos finitamente generados con crecimiento polinómico son virtualmente nilpotentes!
Comenzamos introduciendo las funciones de crecimiento de grupos con respecto a conjuntos generadores finitos:

Definición 4.1 (Función de crecimiento)**.** Sea G un grupo finitamente generado y sea $S \subset G$ un conjunto generador finito de G. Entonces

$$\beta_{G,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$r \mapsto |B^r_{G,S}(e)|$$

es la función de crecimiento de G con respecto a S; aquí,

$$B^r_{G,S}(e) := \{g \in G : d_S(g,e) \leq r\}$$

denota la bola (cerrada) de radio r alrededor de e con respecto a la métrica de palabras d_S en G.

Esta definición tiene sentido porque las bolas para métricas de palabras con respecto a conjuntos generadores finitos son finitas.

Ejemplo 4.1. Algunas funciones de crecimiento de grupos

1. La función de crecimiento del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ con respecto al conjunto generador $\{1\}$ está dada por

$$\beta_{\mathbb{Z},1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto 2r + 1.$$

Por otro lado, una inducción directa muestra que la función de crecimiento de $\mathbb{Z}$ con respecto al conjunto generador $\{2, 3\}$ está dada por

$$\beta_{\mathbb{Z},2,3} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 5 & \text{si } r = 1 \\ 6r + 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}.$$

Así que, en general, las funciones de crecimiento para diferentes conjuntos generadores finitos son diferentes.

2. La función de crecimiento de $\mathbb{Z}^2$ con respecto al conjunto generador estándar $S := \{(1, 0), (0, 1)\}$ es cuadrática
$$\beta_{\mathbb{Z}^2,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto 1 + 4\sum_{j=1}^{r}(r + 1 - j) = 2r^2 + 2r + 1.$$

3. Más generalmente, si $n \in \mathbb{N}$, entonces las funciones de crecimiento de $\mathbb{Z}^n$ crecen como un polinomio de grado n.

4. La función de crecimiento del grupo de Heisenberg
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \cong \langle x, y, z : [x, z], [y, z], [x, y] = z \rangle .$$
con respecto al conjunto generador $\{x, y, z\}$ crece como un polinomio de grado 4.

5. La función de crecimiento de un grupo libre F de rango finito $n \geq 2$ con respecto a un conjunto generador libre S es exponencial:
$$\beta_{F,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto 1 + 2n\sum_{j=0}^{r-1}(2n - 1)^j = 1 + \frac{n}{n-1}(2n - 1)^{r-1}.$$

A continuación presentamos algunas propiedades útiles de las funciones de crecimiento. No presentamos la demostración, pero algunas como las últimas dos son intuitivas. En particular, la propiedad 3 nos dice que el grupo con el mayor crecimiento es el grupo libre, lo cual es de esperarse.

Proposición 4.1 (Propiedades básicas de las funciones de crecimiento)**.** *Sea G un grupo finitamente generado, y sea $S \subset G$ un conjunto generador finito.*

1. *Sub-multiplicatividad. Para todo $r, r_0 \in \mathbb{N}$, tenemos*

$$\beta_{G,S}(r + r_0) \leq \beta_{G,S}(r) \cdot \beta_{G,S}(r_0).$$

2. *Un límite inferior general. Sea G infinito. Entonces, $\beta_{G,S}$ es estrictamente creciente; en particular, $\beta_{G,S}(r) \geq r$ para todo $r \in \mathbb{N}$.*

3. *Un límite superior general. Para todo $r \in \mathbb{N}$, tenemos*

$$\beta_{G,S}(r) \leq \beta_{F(S),S}(r).$$

Como hemos visto, diferentes conjuntos generadores finitos pueden llevar a diferentes funciones de crecimiento; sin embargo, uno podría sospechar que las funciones de crecimiento provenientes de diferentes conjuntos generadores solo difieren por términos de error multiplicativos y aditivos uniformes.
Por lo tanto, introducimos la siguiente noción de equivalencia para funciones de crecimiento:

Definición 4.2 (Cuasi-equivalencia de funciones de crecimiento (generalizadas))**.** Tenemos lo siguiente:

1. Una función de crecimiento generalizada es una función del tipo $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que es creciente.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones de crecimiento generalizadas. Decimos que g cuasi-domina a f si existen $c, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que

$$\forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f(r) \leq c \cdot g(c \cdot r + b) + b.$$

   Si g cuasi-domina a f, entonces escribimos $f \prec g$.

3. Dos funciones de crecimiento generalizadas $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ son cuasi-equivalentes si tanto $f \prec g$ como $g \prec f$; si f y g son cuasi-equivalentes, entonces escribimos $f \sim g$.

Observación 4.1 (Las funciones de crecimiento generan funciones de crecimiento generalizadas)**.** Sea G un grupo finitamente generado y $S \subset G$ un conjunto generador finito. Entonces, la función

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$r \mapsto \beta_{G,S}(\lceil r \rceil)$$

asociada a la función de crecimiento $\beta_{G,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es, de hecho, una función de crecimiento generalizada (que también es sub-multiplicativa).

Si G y H son grupos finitamente generados con conjuntos generadores finitos S y T, respectivamente, entonces decimos que la función de crecimiento $\beta_{G,S}$ está cuasi-dominada por/cuasi-equivalente a la función de crecimiento $\beta_{H,T}$ si las funciones de crecimiento generalizadas asociadas están cuasi-dominadas por/cuasi-equivalentes entre sí.
Más explícitamente, $\beta_{G,S}$ está cuasi-dominada por $\beta_{H,T}$ si y solo si existen $c, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \beta_{G,S}(r) \leq c \cdot \beta_{H,T}(c \cdot r + b) + b.$$

Las funciones de crecimiento de diferentes conjuntos generadores finitos son cuasi-equivalentes; más en general, mostraremos que la clase de cuasi-equivalencia de funciones de crecimiento de conjuntos generadores finitos es un invariante de cuasi-isometría:

Teorema 4.1 (Funciones de crecimiento y cuasi-isometrías)**.** *Sean G y H grupos finitamente generados, y sean $S \subset G$ y $T \subset H$ conjuntos generadores finitos de G y H, respectivamente.*

1. *Si existe una incrustación cuasi-isométrica $(G, d_S) \to (H, d_T)$, entonces*
$$\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}.$$

2. *En particular, si G y H son cuasi-isométricos, entonces las funciones de crecimiento $\beta_{G,S}$ y $\beta_{H,T}$ son cuasi-equivalentes.*

El Teorema anterior muestra, en particular, que las clases de cuasi-equivalencia de funciones de crecimiento generan un invariante de cuasi-isometría con valores en el conjunto de clases de cuasi-equivalencia de funciones de crecimiento generalizadas. Además, esto también se puede ver como un invariante de cuasi-isometría funcional con valores en la categoría asociada con el conjunto parcialmente ordenado dado por clases de cuasi-equivalencia de funciones de crecimiento generalizadas con respecto a la cuasi-dominación.
En particular, podemos definir el tipo de crecimiento de grupos finitamente generados:

Definición 4.3 (Tipos de crecimiento de grupos finitamente generados)**.** Sea G un grupo finitamente generado.

1. El tipo de crecimiento de G es la clase de cuasi-equivalencia (común) de todas las funciones de crecimiento de G con respecto a conjuntos generadores finitos de G.

2. El grupo G tiene crecimiento exponencial si tiene el tipo de crecimiento de la función exponencial $(x \mapsto e^x)$.

3. El grupo G tiene crecimiento polinómico si para un (y, por lo tanto, cualquier) conjunto generador finito S de G, existe un $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\beta_{G,S} \prec (x \mapsto x^a)$.

4. El grupo G tiene crecimiento intermedio si no tiene crecimiento exponencial ni crecimiento polinómico.

Nuestro resultado de interés, y el punto de partida de la teoría de crecimiento de grupos es el siguiente:

Corolario 4.1 (Preservación de la cuasi-isometría del tipo de crecimiento)**.** *El tipo de crecimiento de grupos finitamente generados es un invariante de cuasi-isometría, es decir, grupos finitamente generados cuasi-isométricos tienen el mismo tipo de crecimiento.*
En otras palabras: Grupos finitamente generados con diferentes tipos de crecimiento no pueden ser cuasi-isométricos.

4.2. Extremos y Fronteras

Esta sección es una breve introducción a la geometría *en el infinito* y sus aplicaciones a los grupos finitamente generados. A grandes rasgos, una noción adecuada de geometría en el infinito (o de un *borde*) debería asignar espacios topológicos *buenos* a espacios métricos dados que reflejen el comportamiento de los espacios métricos *lejos*, y debería convertir las cuasi-isometrías de los espacios métricos en homeomorfismos de los espacios topológicos correspondientes; de manera más concisa, un mecanismo de borde debería ser un functor que promueva mapas y propiedades desde el salvaje mundo de las cuasi-isometrías al potencialmente más manso mundo de la topología.
En particular, los bordes son invariantes de cuasi-isometría; sorprendentemente, en muchos casos, los bordes conocen lo suficiente sobre los espacios métricos subyacentes como para permitir interesantes resultados de rigidez.
¿Qué debe ser capaz de hacer un borde? Una noción de borde debería asociar

- A cada espacio métrico X un (preferiblemente compacto) espacio topológico X_∞, y
- A cada incrustación cuasi-isométrica $f : X \to Y$ entre espacios métricos un mapa continuo $f_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ entre los espacios topológicos correspondientes,

de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Si $f, g : X \to Y$ son incrustaciones cuasi-isométricas que están a distancia finita una de la otra, entonces $f_\infty = g_\infty$.
2. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son incrustaciones cuasi-isométricas, entonces $(g \circ f)_\infty = g_\infty \circ f_\infty$.
3. Además, $(id_X)_\infty = id_{X_\infty}$ para todos los espacios métricos X.

   En particular: Si $f : X \to Y$ es una cuasi-isometría, entonces $f_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ es un homeomorfismo.

Los extremos de un espacio se pueden ver como el conjunto de *regiones* principales que conducen *al infinito*. Formalmente, el concepto se describe a través de rayos y componentes conectadas cuando se eliminan piezas acotadas.

Definición 4.4 (Extremos de un espacio Cuasi-Geodésico)**.** Dado $c \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$, y sea X un espacio métrico cuasi-geodésico (c, b):

- Un (c, b)-cuasi-rayo propio en X es una función $\gamma : [0, \infty) \to X$ que es propia en el sentido métrico (para cada conjunto acotado $B \subseteq X$, la preimagen $\gamma^{-1}(B)$ está acotada en $[0, \infty)$) y que satisface la estimación

$$\forall t, t_0 \in [0, \infty), \quad d(\gamma(t), \gamma(t_0)) \leq c \cdot |t - t_0| + b.$$

- Dos cuasi-rayos propios representan el mismo cuasi-extremo de X si, lejos, yacen en la misma componente cuasi-trayectoria. Es decir, los cuasi-rayos propios γ y $\gamma_0 : [0, \infty) \to X$ representan el mismo cuasi-extremo de X si, para cada subconjunto acotado $B \subseteq X$, existe un $t \in [0, \infty)$ tal que $\gamma([t, \infty))$ y $\gamma_0([t, \infty))$ yacen en la misma componente cuasi-trayectoria (es decir, estos puntos pueden ser conectados por cuasi-trayectorias (c, b)).

- Si $\gamma : [0, \infty) \to X$ es un cuasi-rayo propio (c, b), escribimos $\mathrm{end}_Q(\gamma)$ para el conjunto de todos los cuasi-rayos propios (c, b) que representan el mismo cuasi-extremo que γ.
- Llamamos a

$$\mathrm{Ends}_Q(X) := \{\mathrm{end}_Q(\gamma) \mid \gamma : [0, \infty) \to X \text{ es un cuasi-rayo propio } (c, b)\},$$

  el espacio de cuasi-extremos de X (más precisamente, el espacio de cuasi-extremos (c, b) de X).
- Definimos una topología en $\mathrm{Ends}_Q(X)$ a través de la convergencia de secuencias de cuasi-extremos en X hacia un punto en $\mathrm{Ends}_Q(X)$: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Ends}_Q(X)$, y sea $x \in \mathrm{Ends}_Q(X)$. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x si existen cuasi-rayos propios $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y γ en X que representan los cuasi-extremos $x_0, x_1, \ldots$ y x, respectivamente, de modo que se cumple la siguiente condición: Para cada conjunto acotado $B \subseteq X$ existe una secuencia $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ tal que, para n suficientemente grande en $\mathbb{N}$, las imágenes $\gamma_n([t_n, \infty))$ y $\gamma([t_n, \infty))$ yacen en la misma componente cuasi-trayectoria (c, b) de $X \setminus B$.

Observación 4.2. Los constantes iniciales en la definición de los cuasi-extremos no afectan al espacio resultante de cuasi-extremos: Dado $c \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$, y sea (X, d) un espacio cuasi-geodésico (c, b). Si $c_0 \in \mathbb{R}^+_{\geq c}$ y $b_0 \in \mathbb{R}^+_{\geq b}$, entonces cada cuasi-extremo (c_0, b_0) puede ser representado por un cuasi-rayo propio (c, b), y dos cuasi-rayos propios (c, b) representan el mismo cuasi-extremo (c, b) si y solo si representan el mismo cuasi-extremo (c_0, b_0).

Particularmente buenos ejemplos de cuasi-rayos propios son los rayos cuasi-geodésicos. Para espacios métricos geodésicos adecuados, cada (cuasi-)extremo puede ser representado por rayos geodésicos y el espacio de cuasi-extremos coincide con el espacio de extremos:

Proposición 4.2 (Extremos de espacios geodésicos)**.** *Sea X un espacio métrico geodésico y $x \in X$.*

1. *Si X es propio, entonces cada extremo puede ser representado por un rayo geodésico que comienza en x.*
2. *Existe un homeomorfismo canónico $\mathrm{Ends}(X) \cong \mathrm{Ends}_Q(X)$.*

Proposición 4.3 (Invarianza de cuasi-isometría de los extremos)**.** *Sean X e Y espacios métricos cuasi-geodésicos.*

1. *Si $f : X \to Y$ es una incrustación cuasi-isométrica, entonces la aplicación $\mathrm{Ends}(f) : \mathrm{Ends}(X) \to \mathrm{Ends}(Y)$ tal que*
$$\mathrm{end}(\gamma) \mapsto \mathrm{end}(f \circ \gamma)$$
   está bien definida y continua.
2. *Si $f, g : X \to Y$ son incrustaciones cuasi-isométricas que están a una distancia finita una de la otra, entonces $\mathrm{Ends}(f) = \mathrm{Ends}(g)$.*

En particular: Si $f : X \to Y$ es una cuasi-isometría, entonces la aplicación inducida $\mathrm{Ends}(f) : \mathrm{Ends}(X) \to \mathrm{Ends}(Y)$ es un homeomorfismo.

En particular, obtenemos una noción de extremos para grupos finitamente generados:

Definición 4.5 (Extremos de un grupo)**.** Sea G un grupo finitamente generado. El espacio $\mathrm{Ends}(G)$ de los extremos de G se define como $\mathrm{Ends}(\mathrm{Cay}(G,S))$, donde $S \subset G$ es algún conjunto generador finito de G. (Hasta el homeomorfismo canónico, esto no depende de la elección del conjunto generador finito).

El último teorema que presentamos de esta sección nos da una herramienta muy potente para estudiar los extremos de grupos y es el punto de partida de esta teoría:

Teorema 4.2 (Posibles números de extremos de grupos)**.** *Sea G un grupo finitamente generado. Entonces G tiene 0, 1, 2 o infinitos extremos.*

4.3. Grupos Hiperbólicos

El espacio hiperbólico es famoso por sus geodésicas curvas y el hecho de que existen triángulos cuyos ángulos interiores suman menos de 180 grados. Una característica cualitativa de esto es que existe una constante real fija $\delta > 0$, de modo que para cualquier triángulo *bueno* y cualquier punto en cualquiera de los lados del triángulo, existe un punto en uno de los otros dos lados tal que la distancia, con la métrica respectiva, entre los dos puntos es menor que δ. Sorprendentemente, incluso podemos extender esta noción a los grupos al ver si algún grafo de Cayley del grupo tiene esta propiedad de *triángulo delgado.*

Definición 4.6 (Triangulo Geodésico)**.** Sea (X,d) un espacio métrico geodésico. Un triángulo geodésico en X es una tripleta ordenada de segmentos geodésicos $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ donde $\gamma_i : [0,L_i] \to X$ de manera que:

$$\begin{aligned}\gamma_1(L_1) &= \gamma_2(0),\\ \gamma_2(L_2) &= \gamma_3(0),\\ \gamma_3(L_3) &= \gamma_1(0).\end{aligned}$$

A veces, identificamos $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ con su imagen y escribimos el triángulo geodésico como $[x_1,x_2] \cup [x_2,x_3] \cup [x_3,x_1]$, donde $\gamma_i(0) = x_i$.

Definición 4.7 (Triangulo $\delta-$delgado)**.** Decimos que el triángulo geodésico es δ-delgado si existe un número real $\delta \geq 0$ tal que

$$Im(\gamma_i) \subset B_\delta(Im(\gamma_j) \cup Im(\gamma_k)), \quad i,j,k \in \{1,2,3\}$$

donde $B_\delta(A) = \{x \in X \mid d(x,y) \leq \delta, y \in A\}$ para $A \subset X$.

Ejemplo 4.2. Triángulos δ-delgados en algunos espacios métricos:

1. Los triángulos habituales en $\mathbb{R}^n$ son ejemplos de triángulos geodésicos.

2. Considera la realización geométrica de un árbol. Los triángulos geodésicos aquí se ven muy diferentes que en $\mathbb{R}^n$. En cambio, los triángulos geodésicos aquí parecen un trípode y tienen la propiedad de que cada punto en el triángulo se encuentra en al menos dos lados del triángulo.

La definición anterior motiva por completo la siguiente:

Definición 4.8 (Gromov-Hiperbolicidad)**.** Dado un espacio métrico geodésico (X, d), decimos que X es (Gromov) hiperbólico si existe $\delta \geq 0$ de modo que todos los triángulos geodésicos son δ-finos. Llamamos δ la constante de hiperbolicidad y, por conveniencia, decimos que X es δ-hiperbólico.

Una forma equivalente de definir que X sea hiperbólico es si existe un número real $\delta \geq 0$ de manera que, para cualquier triángulo geodésico $[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_1]$ y $p \in [x_i, x_j]$, existe $q \in [x_i, x_k] \cup [x_j, x_k]$ tal que $d(p, q) \leq \delta$.

Ejemplo 4.3. Ejemplos de espacios hiperbólicos

1. Para cualquier árbol, dado que cualquier punto en un triángulo geodésico se encuentra en al menos dos lados del triángulo, podemos concluir que los árboles son $0-$delgados y, por lo tanto, los árboles son 0-hiperbólicos.

2. $\mathbb{R}$ es hiperbólico ya que los triángulos geodésicos son 0-finos, al igual que en los árboles.

3. De manera similar, $\mathbb{Z}$ es hiperbólico.

4. $(\mathbb{R}^n, \|\|)$ no tiene triángulos delgados para ningún δ fijo. Para ver esto, fijemos $\delta > 0$. Elijamos cualquier punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $B_\delta(x_0)$. Ahora, podemos formar un triángulo geodésico lo suficientemente grande con x_0 como punto medio de uno de los lados de manera que para cualquier punto y en los otros dos lados, $d(x_0, y) > \delta$.

Extendemos la noción de hiperbolicidad a grupos de la siguiente forma

Definición 4.9 (Grupo hiperbólico)**.** Sea G un grupo finitamente generado. Decimos que G es un grupo hiperbólico si existe un conjunto generador finito S tal que $Cay(G, S)$ es hiperbólico. Dado que cualquier par de grafos de Cayley para G son cuasi-isométricos, veremos en breve que si G tiene un grafo de Cayley hiperbólico, entonces todos sus grafos de Cayley son hiperbólicos.

Ejemplo 4.4. Ejemplos de grupos hiperbólicos:

1. Cualquier grupo finito es hiperbólico, ya que su grafo de Cayley está acotado. Por lo tanto, simplemente elige δ lo suficientemente grande.

2. Dado que el grafo de Cayley de cualquier grupo libre es un árbol, tenemos que los grupos libres son grupos hiperbólicos.

3. $\mathbb{R}$ como grupo es hiperbólico. De manera similar, lo es $\mathbb{Z}$ como grupo.

4. . Dado que $\mathbb{Z}^2$ es cuasi-isométrico al plano, no es hiperbólico.

Dado que hiperbolicidad es una noción invariante de cuasi-isometría y dado que diferentes conjuntos generadores finitos de grupos finitamente generados dan lugar a métricas de palabra y grafos de Cayley canónicamente cuasi-isométricos, obtenemos una noción sensata de grupos hiperbólicos.

Teorema 4.3. *Dejemos que X e Y sean espacios métricos geodésicos. Supongamos que $f : X \to Y$ es una incrustación cuasi-isométrica. Si Y es hiperbólico, entonces X también es hiperbólico.*

Corolario 4.2 (Invarianza de la Cuasi-Isometría de la Hiperbolicidad)**.** *Supongamos que X e Y son espacios métricos geodésicos. Si $f : X \to Y$ es una cuasi-isometría, entonces X es hiperbólico si y solo si Y es hiperbólico.*

Proposición 4.4. *Supongamos que G sea un grupo y X sea un espacio métrico propio y hiperbólico. Si G actúa geométricamente en X, entonces G es un grupo hiperbólico.*

Corolario 4.3. *Tenemos los siguientes hechos:*

1. *Dejemos que G y G_0 sean grupos finitamente generados con conjuntos generadores finitos S y S_0, respectivamente, y supongamos que G_0 es hiperbólico. Si $f : Cay(G, S) \to Cay(G_0, S_0)$ es una incrustación cuasi-isométrica, entonces G es hiperbólico.*

2. *Si $f : Cay(G, S) \to Cay(G_0, S_0)$ es una cuasi-isometría, entonces G es hiperbólico si y solo si G_0 es hiperbólico.*

5. Anexos.

Anexo A. Demostraciones

Proposición 3.1
Demostración. Si $f : X \to Y$ es una cuasi-isometría, entonces, por definición, existe una cuasi-inclusión cuasi-inversa $g : Y \to X$. Por lo tanto, existe una $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $y \in Y$ se cumple que $\forall y \in Y, d_Y(f \circ g(y), y) \leq c$; en particular, f tiene una imagen cuasi-densa. Recíprocamente, supongamos que $f : X \to Y$ es una cuasi-inclusión cuasi-isométrica con imagen cuasi-densa. Utilizando el axioma de elección, encontramos una cuasi-inclusión cuasi-inversa: Dado que f es una cuasi-inclusión cuasi-isométrica con imagen cuasi-densa, existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x, x_0 \in X$ se cumple

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x_0) - c \leq d_Y(f(x), f(x_0)) \leq c \cdot d_X(x, x_0) + c,$$

y para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $d_Y(f(x), y) \leq c$.
Por el axioma de elección, existe un mapa $g : Y \to X$ tal que $d_Y(f(xy), y) \leq c$ para todo $y \in Y$.
El mapa g es cuasi-inverso a f: Por construcción, para todo $y \in Y$ tenemos

$$d_Y(f \circ g(y), y) = d_Y(f(xy), y) \leq c;$$

y, recíprocamente, para todo $x \in X$ obtenemos (usando el hecho de que f es una cuasi-inclusión cuasi-isométrica)

$$d_X(g \circ f(x), x) = d_X(xf(x), x) \leq c \cdot d_Y(f(xf(x)), f(x)) + \frac{c}{2} \leq c \cdot c + \frac{c}{2} = \frac{3c^2}{2}.$$

Así que $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen una distancia finita respecto a los respectivos mapas de identidad. Además, g también es una cuasi-inclusión cuasi-isométrica: Sea $y, y_0 \in Y$. Entonces

$$d_X(g(y), g(y_0)) = d_X(xy, xy_0) \leq c \cdot d_Y(f(xy), f(xy_0)) + \frac{3c^2}{2} \leq c \cdot d_Y(y, y_0) + \frac{3c^2}{2},$$

y

$$d_X(g(y), g(y_0)) \geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(f(xy), f(xy_0)) - \frac{1}{c} \geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y_0) - \frac{2c}{c} - 1.$$

(El mismo argumento muestra que las cuasi-inclusiones cuasi-inversas de cuasi-isometrías son cuasi-inclusiones cuasi-isométricas). ■

Proposición 3.2
Demostración. **Para (1).** Dada $f : X \to Y$ una incrustación cuasi-isométrica, y $f' : X \to Y$ a distancia finita de f, tenemos que existen $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\forall x, x' \in X, \quad \frac{1}{c} d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x, x') + b.$$

Luego

$$d_Y(f'(x), f'(x')) \leq d_Y(f'(x), f(x)) + d_Y(f(x), f(x')) + d_Y(f(x'), f'(x')) \leq c d_X(x, x') + b + 2k.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d_Y(f'(x), f'(x')) &\geq d_Y(f(x), f'(x')) - d_Y(f'(x), f(x)) \\ &\geq d_Y(f(x), f(x')) - d(f(x'), f'(x')) - d_Y(f'(x), f(x)) \\ &\leq \frac{1}{c} d_X(x, x') - b - 2k \end{aligned}$$

De esta forma se prueba **(1)** y **(2)** es un corolario.
Ahora veamos **(3)**.
Por último veamos **(5)** en el caso de Cuasi-isometrías. El caso Bilipschitz es un corolario tomando $b = 0$. Supongamos que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son cuasi-isometrías. Entonces podemos elegir $c \geq 1$ de manera que

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x_0) - c \leq d_Y(f(x), f(x_0)) \leq c \cdot d_X(x, x_0) + c,$$

y

$$\frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y_0) - c \leq d_Z(g(y), g(y_0)) \leq c \cdot d_Y(y, y_0) + c.$$

Entonces, tenemos

$$\frac{1}{c^2} \cdot d_X(x, x_0) - \frac{1}{c} - c \leq d_Z(gf(x), gf(x_0)) \leq c \cdot d_Y(f(x), f(x_0)) + c \leq c(c \cdot d_X(x, x_0) + c) + c = c^2 \cdot d_X(x, x_0) + c^2 + c.$$

Dado que $c \geq 1$, tenemos

$$\frac{1}{c^2} \cdot d_X(x, x_0) - (c^2 + c) \leq d_Z(gf(x), gf(x_0)) \leq c^2 \cdot d_X(x, x_0) + (c^2 + c).$$

Así que $gf : X \to Z$ es una cuasi-inclusión cuasi-isométrica.
Ahora, tomemos $z \in Z$. Entonces existe $y \in Y$ con $d_Z(g(y), z) \leq c$ y existe $x \in X$ con $d_Y(f(x), y) \leq c$. Por lo tanto,

$$d_Z(gf(x), z) \leq d_Z(gf(x), g(y)) + d_Z(g(y), z) \leq c \cdot d_Y(f(x), y) + c + c \leq c^2 + 2c.$$

Entonces, gf es gruesamente sobreyectiva y, por lo tanto, una cuasi-isometría. ■

Referencias

[1] Löh, C. (2018). Geometric group Theory: An Introduction. Springer.

[2] Nekrashevych, V. (1997). QUASI-ISOMETRY GROUPS. Matematychni Studii. Recuperado 27 de octubre de 2023, de http://matstud.org.ua/texts/1997/8_2/8_2_227-232.pdf

[3] Lanfranco, J. (2019). An Introduction to Quasi-Isometry and Hyperbolic Groups [Tesis de Maestría]. University of Pennsylvania.

[4] Goldsborough, A., & Zbinden, S. (2023). Characterising quasi-isometries of the free group. arXiv (Cornell University). https://doi.org/10.48550/arxiv.2307.13667